Équation différentielle de Lamé et fonctions de Lamé

L'équation de Lamé est un cas particulier de l'équation de Heun, elle s'écrit :

Sous sa forme algébrique :

$$\text{Equation de Lamé} \quad \gamma = \delta = \varepsilon = \frac{1}{2} \qquad a = \frac{1}{k^2} \qquad q = -\frac{h}{4k^2} \qquad \tilde{\alpha}\tilde{\beta} = -\frac{\nu(\nu+1)}{4}$$

$$\text{Contrainte de Fuchs} \quad \tilde{\alpha} + \tilde{\beta} = \frac{1}{2} \Rightarrow \tilde{\alpha} = -\frac{\nu}{2} \quad \tilde{\beta} = \frac{\nu+1}{2} \quad ou \quad \tilde{\alpha} = \frac{\nu+1}{2} \quad \tilde{\beta} = -\frac{\nu}{2}$$

$$y''(z) + \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z - \frac{1}{k^2}}\right\} y'(z) + \frac{\frac{h}{k^2} - \nu(\nu+1)z}{4z(z-1)\left(z - \frac{1}{k^2}\right)} y(z) = 0$$

$$\Leftrightarrow y''(z) + \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{k^2}{k^2 z - 1}\right\} y'(z) + \frac{h - k^2\nu(\nu+1)z}{4z(z-1)(k^2 z - 1)} y(z) = 0 \qquad .$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{k^2} \quad et \quad \lambda = -ah$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y''(z) + \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-a}\right\} y'(z) - \frac{\lambda + \nu(\nu+1)z}{4z(z-1)(z-a)} y(z) = 0 \\ ou \\ 4z(z-1)(z-a)y''(z) + 2\left(3z^2 - 2(a+1)z + a\right)y'(z) - \left(\lambda + \nu(\nu+1)z\right)y(z) = 0 \end{cases}$$

Sous sa forme Jacobienne :

en considérant z = $sn^2(\mu,k)$, il vient : $y''(\mu) + \left(h - \nu(\nu+1)k^2 sn^2(\mu,k)\right)y(\mu) = 0$

Sous la forme trigonométrique faisant intervenir l'angle φ de l'amplitude Jacobienne :

$$\begin{cases} \varphi = \frac{\pi}{2} - am(\mu,k) \Rightarrow Cos(\varphi) = sn(\mu,k) \\ \left(1 - k^2 Cos^2(\varphi)\right)y''(\varphi) + kCos(\varphi)Sin(\varphi)y'(\varphi) + \left(h - \nu(\nu+1)k^2 Cos^2(\varphi)\right)y(\mu) = 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{1 - k^2 Cos^2(\varphi)}\frac{d}{d\varphi}\left(\sqrt{1 - k^2 Cos^2(\varphi)}\frac{d}{d\varphi}(\varphi)\right) + \left(h - \nu(\nu+1)k^2 Cos^2(\varphi)\right)y(\mu) = 0 \end{cases}$$

Sous la forme donnée par C.G . Lambe (1952 « Lamé-Wangerin functions ») :

Dans l'article de 1952 de C.G . Lambe, « Lamé-Wangerin functions », les fonctions sont improprement dénommées « Lamé-Wangerin », alors qu'il s'agit des fonctions actuellement dénommées « fonctions algébriques de Lamé » ayant pour propriété d'être de période 8K et pour certaines valeurs du paramètre h de développement fini (la raison pour laquelle on les appelle algébriques) :

$$4z(z-1)(z-a)\frac{d^2y(z)}{dz^2}+2\left(3z^2-2(a+1)z+a\right)\frac{dy(z)}{dz}-\left(\lambda+\nu(\nu+1)z\right)y(z)=0$$

$$Posons \quad z(x)=\frac{\left(x^2-a\right)^2}{4x(x-1)(x-a)} \quad et \quad y(z)=\left(x(x-1)(x-a)\right)^{-\frac{\nu}{2}}u(x)=f(x) \qquad g(x)=\frac{dx}{dz}=\left(\frac{dz}{dx}\right)^{-1}$$

$$\frac{dy(z)}{dz}=g(x)\frac{d}{dx}\left(y(z(x))\right)=g(x)\frac{d}{dx}\left(f(x)\right) \qquad \frac{d^2y(z)}{dz^2}=g(x)\frac{d}{dx}\left(g(x)\frac{df(x)}{dx}\right)=g^2(x)\frac{d^2f(x)}{dx^2}+g(x)\frac{dg(x)}{dx}\frac{df(x)}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\left(x^2-a\right)\left(x^2-2ax+a\right)\left(x^2-2x+a\right)}{4x^2(x-1)^2(x-a)^2}\Rightarrow g(x)=\left(\frac{dz}{dx}\right)^{-1}=\frac{4x^2(x-1)^2(x-a)^2}{\left(x^2-a\right)\left(x^2-2ax+a\right)\left(x^2-2x+a\right)}$$

Avec beaucoup d'algèbre et grâce à Mathematica, l'équation de Lamé en x et u(x) s'écrit :

$$x(x-1)(x-a)\frac{d^2u(x)}{dx^2}-\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\left(3x^2-2(a+1)x+a\right)\frac{du(x)}{dx}+\left(\nu(2\nu-1)x-\lambda-\nu^2(a+1)\right)u(x)=0$$

En posant ν=μ+1/2, il vient :

$$\nu=\mu+\frac{1}{2}\Rightarrow x(x-1)(x-a)\frac{d^2u(x)}{dx^2}-\mu\left(3x^2-2(a+1)x+a\right)\frac{du(x)}{dx}+\left(\mu(2\mu+1)x-\lambda-\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2(a+1)\right)u(x)=0$$

Cette dernière équation sert pour étudier les solutions polynomiales en z lorsque μ est un entier, et dans ce cas les solutions de l'équation de Lamé sont dîtes algébriques.

Solutions périodiques 2K et 4K de l'équation de Lamé

De la forme Jacobienne de l'équation de Lamé, il apparaît clairement qu'il s'agit d'une équation différentielle du second degré dont les termes sont périodiques. Il s'agit dont d'une équation de Hill, mais au lieu d'avoir des termes sinusoïdales de période 2π ou π , il s'agit d'un terme $sn^2(\mu,k)$ impliquant une fonction de Jacobi de période 4K, soit de période 2K puisque le terme est au carré. Aussi paraît-il naturel dans une première approche de rechercher des fonctions solutions de même période 4K ou de période 2K, K étant l'intégrale elliptique classique : $K(k)=\int_0^{\pi/2} d\theta\left(1-k^2 Sin^2(\theta)\right)^{-1/2}$.

Ces fonctions périodiques sont d'une importance considérable car elles sont souvent parfaitement adaptées à la géométrie induite par les systèmes de coordonnées orthogonales utilisés qui présentent la périodicité 4K ou 2K dans certaines de leur variable.

On peut à profit établir une analogie avec soit les solutions périodiques de l'équation différentielles des vibrations, soit avec l'équation de Mathieu. Cette analogie permet de clarifier (sans pour autant expliquer et justifier) la construction des solutions périodiques de l'équation de Lamé.

Il faut vraiment se reporter aux articles fondateurs dans la construction des solutions périodiques pour comprendre le « comment du pourquoi », étape je pense indispensable pour toute utilisation adéquate des fonctions de Lamé dans la résolution d'un problème aux limites, soit : 1940, E.L.Ince, « V. The Periodic Lamé Functions », 1940, E.L.Ince, « VII.Further Investigations into the Periodic Lamé Functions », « A.Erdélyi.H.Bateman, HIGHER TRANSCENDENTAL FUNCTIONS VOL III, Lamé-Heun Functions, chapitre XV, section 15.5.1 ».

Il est bien évident que l'équation de Lamé possède des solutions d'un tout autre type, soit non périodiques, soit de période un multiple entier quelconque de 2K. Il est tout aussi évident qu'en tant qu'équation différentielle du second ordre, elle admet une seconde solution linéairement indépendante. Dans ce qui suit ces secondes solutions ne sont pas décrites. Un des moyens les plus simples de construire les secondes solutions est d'utiliser le développement en série de fonctions de Legendre de première espèce, puis de rechercher un développement similaire à l'aide des fonctions de Legendre de deuxième espèce pour les obtenir (voir 1948, Erdelyi « XXVII. Expansions of Lamé Functions into Series of Legendre Functions » et 1966 B.D.Sleeman, « The expansion of Lamé functions into series of associated Legendre functions of the second kind »).

Dans ce qui suit nous établissons trois tableaux des analogies de construction des solutions de l'équation de Lamé, de l'équation des ondes et de l'équation de Mathieu, sur une même ligne (en lecture) :

Équation des ondes y''(z)+hy(z)=0 : un paramètre h							
Notation	Valeur caractéristique h	Parité autour de z=0	Parité autour de z=π/2	Conditions aux limites sur [0,π/2]	Période	Translation π	Translation π/2
Cos(2nz)	$h=(2n)^2$	y(-z)=y(z)	y(π-z)=y(z)	y'(0)=y'(π/2)=0	π	y(z+π)=y(z)	y(z+π/2)=y(z-π/2)
Sin((2n+1)z)	$h=(2n+1)^2$	y(-z)=-y(z)	y(π-z)=y(z)	y(0)=y'(π/2)=0	2 π	y(z+π)=-y(z)	y(z+π/2)=-y(z-π/2)
Cos((2n+1)z)	$h=(2n+1)^2$	y(-z)=y(z)	y(π-z)=-y(z)	y'(0)=y(π/2)=0	2 π	y(z+π)=-y(z)	y(z+π/2)=-y(z-π/2)
Sin((2n+2)z)	$h=(2n+2)^2$	y(-z)=-y(z)	y(π-z)=-y(z)	y(0)=y(π/2)=0	π	y(z+π)=y(z)	y(z+π/2)=y(z-π/2)

Équation de Mathieu $y''(z)+(h-2q\cos(2z))y(z)=0$: deux paramètres h,q							
Notation	Valeur caractéristique h=f(q)	Parité autour de z=0	Parité autour de z=π/2	Conditions aux limites sur [0,π/2]	Période	Translation π	Translation π/2
$ce_{2n}(q,z)$	$h=a_{2n}(q)$	y(-z)=y(z)	y(π-z)=y(z)	y'(0)=y'(π/2)=0	π	y(z+π)=y(z)	y(z+π/2)=y(z-π/2)
$se_{2n+1}(q,z)$	$h=b_{2n+1}(q)$	y(-z)=-y(z)	y(π-z)=y(z)	y(0)=y'(π/2)=0	2 π	y(z+π)=-y(z)	y(z+π/2)=-y(z-π/2)
$ce_{2n+1}(q,z)$	$h=a_{2n+1}(q)$	y(-z)=y(z)	y(π-z)=-y(z)	y'(0)=y(π/2)=0	2 π	y(z+π)=-y(z)	y(z+π/2)=-y(z-π/2)
$se_{2n+2}(q,z)$	$h=b_{2n+2}(q)$	y(-z)=-y(z)	y(π-z)=-y(z)	y(0)=y(π/2)=0	π	y(z+π)=y(z)	y(z+π/2)=y(z-π/2)

Équation de Lamé $y''(z)+(h-\nu(\nu+1)k^2sn^2(z,k))y(z)=0$: trois paramètres h,ν,k^2, changement π/2->K et intervertion de $Ec_\nu^{2n+1}(z)$ et $Es_\nu^{2n+1}(z)$ dans la notation NIST								
Notation Nist/Ince	Valeur caractéristique h=f(ν,k²)	Parité autour de z=0	Parité autour de z=K=K(k²)	Conditions aux limites sur [0,K(k²)]	Conditions aux limites sur [0,2K(k²)]	Période	Translation 2K	Translation K
$Ec_\nu^{2n}(z)/Ec_\nu^{2n}(z)$	$h=a_\nu^{2n}(k^2)$	y(-z)=y(z)	y(2K-z)=y(z)	y'(0)=y'(K)=0	y'(0)=y'(2K)=0	2K	y(z+2K)=y(z)	y(z+K)=y(z-K)
$Ec_\nu^{2n+1}(z)/Es_\nu^{2n+1}(z)$	$h=a_\nu^{2n+1}(k^2)$	y(-z)=-y(z)	y(2K-z)=y(z)	y(0)=y'(K)=0	y(0)=y(2K)=0	4K	y(z+2K)=-y(z)	y(z+K)=-y(z-K)
$Es_\nu^{2n+1}(z)/Ec_\nu^{2n+1}(z)$	$h=b_\nu^{2n+1}(k^2)$	y(-z)=y(z)	y(2K-z)=-y(z)	y'(0)=y(K)=0	y'(0)=y'(2K)=0	4K	y(z+2K)=-y(z)	y(z+K)=-y(z-K)
$Es_\nu^{2n+2}(z)/Es_\nu^{2n+2}(z)$	$h=b_\nu^{2n+2}(k^2)$	y(-z)=-y(z)	y(2K-z)=-y(z)	y(0)=y(K)=0	y(0)=y(2K)=0	2K	y(z+2K)=y(z)	y(z+K)=y(z-K)

Orthogonalité et Normalisation des fonctions périodiques 2K et 4K

Il est assez facile d'établir les formules d'orthogonalité des fonctions périodiques de Lamé pour une même valeur caractéristique h :

$$\begin{cases}\int_0^K dx\, Ec_\nu^{2m}(x,k^2)Ec_\nu^{2p}(x,k^2)=0 \quad pour \quad m\neq p & \int_0^K dx\, Ec_\nu^{2m+1}(x,k^2)Ec_\nu^{2p+1}(x,k^2)=0 \quad pour \quad m\neq p \\ \int_0^K dx\, Es_\nu^{2m+1}(x,k^2)Es_\nu^{2p+1}(x,k^2)=0 \quad pour \quad m\neq p & \int_0^K dx\, Es_\nu^{2m+2}(x,k^2)Es_\nu^{2p+2}(x,k^2)=0 \quad pour \quad m\neq p\end{cases}.$$

La normalisation dépend des articles, mais je prendrais la normalisation la plus communément utilisée, celle donnée dans « NIST Handbook of Mathematical Functions, chapitre 29, Lamé-Functions », soit :

$$\begin{cases}\int_0^K dx\, dn(x,k)\left(Ec_\nu^{2m}(x,k^2)\right)^2=\frac{\pi}{4} & \int_0^K dx\, dn(x,k)\left(Ec_\nu^{2m+1}(x,k^2)\right)^2=\frac{\pi}{4} \\ \int_0^K dx\, dn(x,k)\left(Es_\nu^{2m+1}(x,k^2)\right)^2=\frac{\pi}{4} & \int_0^K dx\, dn(x,k)\left(Es_\nu^{2m+2}(x,k^2)\right)^2=\frac{\pi}{4}\end{cases}.$$

La normalisation proposée par Ince dans « 1940, E.L.Ince, VII.Further Investigations into the Periodic Lamé Functions » semble être la suivante :

$$\begin{cases}\int_0^{4K} dx\left(Ec_\nu^{2m}(x,k^2)\right)^2=\pi & \int_0^{4K} dx\left(Ec_\nu^{2m+1}(x,k^2)\right)^2=\pi \\ \int_0^{4K} dx\left(Es_\nu^{2m+1}(x,k^2)\right)^2=\pi & \int_0^{4K} dx\left(Es_\nu^{2m+2}(x,k^2)\right)^2=\pi\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\int_0^{K} dx\left(Ec_\nu^{2m}(x,k^2)\right)^2=\frac{\pi}{4} & \int_0^{K} dx\left(Ec_\nu^{2m+1}(x,k^2)\right)^2=\frac{\pi}{4} \\ \int_0^{K} dx\left(Es_\nu^{2m+1}(x,k^2)\right)^2=\frac{\pi}{4} & \int_0^{K} dx\left(Es_\nu^{2m+2}(x,k^2)\right)^2=\frac{\pi}{4}\end{cases}$$

Le complément de normalisation fixe des valeurs positives aux fonctions ou leur dérivée première :

$$Ec_\nu^{2m}(K(k^2),k^2)>0 \quad et \quad Ec_\nu^{2m+1}(K(k^2),k^2)>0 \quad et \quad \left.\frac{dEs_\nu^{2m+1}(x,k^2)}{dx}\right|_{x=K(k^2)}>0 \quad et \quad \left.\frac{dEs_\nu^{2m+2}(x,k^2)}{dx}\right|_{x=K(k^2)}>0.$$

Algorithme de construction des solutions périodiques 2K et 4K de l'équation de Lamé par le développement trigonométrique

Tout comme pour les fonctions de Lamé, la construction des fonctions périodiques 2K et 4K peut se présenter sous la forme de la recherche des valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice tri-diagonales. Le développement en série le plus commode est celui en série de Fourier de la variable :

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - am(z,k) \Leftrightarrow Cos(\varphi) = sn(z,k) \Rightarrow d\varphi = -dn(z,k)$$

Le schéma de construction des valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice tri-diagonale est toujours le même, et se présente génériquement comme suit :

$$\begin{cases} (\mathbf{M}_\infty - H\mathbf{I}_\infty).\mathbf{X}_\infty = 0 \\ avec \quad H = 2h - v(v+1) \\ h = \dfrac{H + v(v+1)}{2} \end{cases} \quad \mathbf{M}_\infty = \begin{bmatrix} \beta_0 & \alpha_0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots \\ \gamma_1 & \beta_1 & \alpha_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \gamma_{N-3} & \beta_{N-3} & \alpha_{N-3} & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & \gamma_{N-2} & \beta_{N-2} & \alpha_{N-2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \gamma_{N-1} & \beta_{N-1} & \alpha_{N-1} & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \gamma_N & \beta_N & \dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \end{bmatrix} \quad \mathbf{X}_\infty = [x_0, \dots, x_{N-1}, x_N, \dots,]^t$$

$$\begin{cases} H_m \quad valeurs\ propres \rightarrow h_m = \dfrac{H_m + v(v+1)}{2} \\ x_m(h_m) \quad vecteurs\ propres \\ m \in \{0,1,2,..,N,..\} \end{cases} \quad de \quad \mathbf{M}_\infty \Rightarrow \begin{cases} Ec_v^{2m}(z,k^2) = \sum_{p=0}^{p=\infty} x_{p,m}(h_m) Cos(2p\varphi) \quad ou \quad dn(z,k)\sum_{p=0}^{p=\infty} x_{p,m}(h_m) Cos(2p\varphi) \\ Ec_v^{2m+1}(z,k^2) = \sum_{p=0}^{p=\infty} x_{p,m}(h_m) Cos((2p+1)\varphi) \quad ou \quad dn(z,k)\sum_{p=0}^{p=\infty} x_{p,m}(h_m) Cos((2p+1)\varphi) \\ Es_v^{2m+1}(z,k^2) = \sum_{p=0}^{p=\infty} x_{p,m}(h_m) Sin((2p+1)\varphi) \quad ou \quad dn(z,k)\sum_{p=0}^{p=\infty} x_{p,m}(h_m) Sin((2p+1)\varphi) \\ Es_v^{2m+2}(z,k^2) = \sum_{p=0}^{p=\infty} x_{p,m}(h_m) Sin((2p+2)\varphi) \quad ou \quad dn(z,k)\sum_{p=0}^{p=\infty} x_{p,m}(h_m) Sin((2p+2)\varphi) \end{cases}$$

$$Récurrence \quad \begin{cases} \gamma_0 = 0 \quad x_0 \neq 0 \quad quelconque\ fixé\ par\ la\ normalisation \\ \beta_0 x_0 + \alpha_1 x_1 = H\ x_0 \\ \gamma_p x_{p-1} + \beta_p x_p + \alpha_p x_{p+1} = H\ x_p \\ \dots \end{cases}$$

Les récurrences sont celles décrites dans l'article fondateur de 1940 de E.L.Ince « VII—Further investigations into the periodic lamé functions». Dans cet article la variable d'amplitude prise est la suivante : $v = am(z,k) \Leftrightarrow Sin(v) = sn(z,k) \quad et \quad Cos(v) = cn(z,k) \quad et \quad dv = dn(z,k)$. *Puis ce sont les récurrences avec la variable d'amplitude ϕ dans l'ouvrage « A.Erdélyi.H.Bateman, HIGHER TRANSCENDENTAL FUNCTIONS VOL III, Lamé-Heun Functions, chapitre XV , section 15.5.1», ainsi que celles de « NIST Handbook of Mathematical Functions, chapitre 29, Lamé-Functions ».*

Voici un tableau exprimant les huit types de développements trigonométriques possibles des fonctions de Lamé périodiques 2K et 4K (deux par fonctions), avec les cas pour lesquels le développement est fini , soit qui donne lieu aux polynômes de Lamé correspondants :

Fonctions de Lamé périodiques Notation NIST	*Type de développement et formule dans le livre « A.Erdélyi.H.Bateman, HIGHER TRANSCENDENTAL FUNCTIONS VOL III, Lamé-Heun Functions, chapitre XV, section 15.5.1», Repris dans « NIST Handbook of Mathematical Functions, chapitre 29, Lamé-Functions ».*	*Récurrence*	*Normalisation*	*Cas d'un développement fini : polynôme de Lamé et type et notation d'Arscott, type de NIST*
$Ec_\nu^{2m}(z,k^2)$	$Ec_\nu^{2m}(z,k^2)=\frac{A_0}{2}+\sum_{p=1}^{p=\infty}A_{2p}Cos(2p\varphi)$ *Développement (14)*	$\begin{cases}\alpha_p=\begin{cases}(\nu-1)(\nu+2)k^2 & pour\quad p=0\\ \frac{1}{2}(\nu-2p-1)(\nu+2p+2)k^2 & pour\quad p\geq1\end{cases}\\ \beta_p=4p^2(2-k^2)\\ \gamma_p=\frac{1}{2}(\nu-2p+2)(\nu+2p-1)k^2\end{cases}$ *Formule (18)*	$\frac{A_0^{\ 2}}{2}+\sum_{p=1}^{p=\infty}A_{2p}^{\ \ 2}=1$ $\frac{A_0}{2}+\sum_{p=1}^{p=\infty}A_{2p}>0$	$\nu=2n\quad p_{\max}=n$ *Type 1 (Arscott), Type 1 (NIST) :* $uE_{2n}^m(z,k^2)\quad m\in\{0,...,n\}$ $uE_{2n}^m(z,k^2)=\frac{A_0}{2}+\sum_{p=1}^{p=n}A_{2p}Cos(2p\varphi)$
$Ec_\nu^{2m}(z,k^2)$	$Ec_\nu^{2m}(z,k^2)=dn(z,k)\left\{\frac{C_0}{2}+\sum_{p=1}^{p=\infty}C_{2p}Cos(2p\varphi)\right\}$ *Développement (14)*	$\begin{cases}\alpha_p=\begin{cases}\nu(\nu+1)k^2 & pour\quad p=0\\ \frac{1}{2}(\nu-2p)(\nu+2p+1)k^2 & pour\quad p\geq1\end{cases}\\ \beta_p=4p^2(2-k^2)\\ \gamma_p=\frac{1}{2}(\nu-2p+1)(\nu+2p)k^2\end{cases}$ *Formule (19)*	$\left(1-\frac{k^2}{2}\right)\left\{\frac{C_0^{\ 2}}{2}+\sum_{p=1}^{p=\infty}C_{2p}^{\ \ 2}\right\}-\frac{k^2}{2}\sum_{p=0}^{p=\infty}C_{2p}C_{2p+2}=1$ $\frac{C_0}{2}+\sum_{p=1}^{p=\infty}C_{2p}>0$	$\nu=2n+1\quad p_{\max}=n$ *Type 4 (Arscott), Type 4 (NIST) :* $dE_{2n+1}^m(z,k^2)\quad m\in\{0,...,n\}$ $dE_{2n+1}^m(z,k^2)=dn(z,k)\left\{\frac{C_0}{2}+\sum_{p=1}^{p=n}C_{2p}Cos(2p\varphi)\right\}$
$Ec_\nu^{2m+1}(z,k^2)$	$Ec_\nu^{2m+1}(z,k^2)=\sum_{p=0}^{p=\infty}A_{2p+1}Cos((2p+1)\varphi)$ *Développement (15)*	$\begin{cases}\alpha_p=\frac{1}{2}(\nu-2p-2)(\nu+2p+3)k^2\\ \beta_p=\begin{cases}2-k^2+\frac{1}{2}\nu(\nu+1)k^2 & pour\quad p=0\\ (2p+1)^2(2-k^2) & pour\quad p\geq1\end{cases}\\ \gamma_p=\frac{1}{2}(\nu-2p+1)(\nu+2p)k^2\end{cases}$ *Formule (20)*	$\sum_{p=0}^{p=\infty}A_{2p+1}^{\ \ 2}=1$ $\sum_{p=0}^{p=\infty}A_{2p+1}>0$	$\nu=2n+1\quad p_{\max}=n$ *Type 2 (Arscott), Type 2 (NIST) :* $sE_{2n+1}^m(z,k^2)\quad m\in\{0,...,n\}$ $sE_{2n+1}^m(z,k^2)=\sum_{p=0}^{p=n}A_{2p+1}Cos((2p+1)\varphi)$
$Ec_\nu^{2m+1}(z,k^2)$	$Ec_\nu^{2m+1}(z,k^2)=dn(z,k)\sum_{p=0}^{p=\infty}C_{2p+1}Cos((2p+1)\varphi)$ *Développement (15)*	$\begin{cases}\alpha_p=\frac{1}{2}(\nu-2p-1)(\nu+2p+2)k^2\\ \beta_p=\begin{cases}2-k^2+\frac{1}{2}\nu(\nu+1)k^2 & pour\quad p=0\\ (2p+1)^2(2-k^2) & pour\quad p\geq1\end{cases}\\ \gamma_p=\frac{1}{2}(\nu-2p)(\nu+2p+1)k^2\end{cases}$ *Formule (21)*	$\left(1-\frac{k^2}{2}\right)\left\{\sum_{p=0}^{p=\infty}C_{2p+1}^{\ \ 2}\right\}-\frac{k^2}{2}\left\{\frac{C_1^{\ 2}}{2}+\sum_{p=0}^{p=\infty}C_{2p+1}C_{2p+3}\right\}=1$ $\sum_{p=0}^{p=\infty}C_{2p+1}>0$	$\nu=2n\quad p_{\max}=n-1\quad n>0$ *Type 7 (Arscott), Type 6 (NIST) :* $sdE_{2n}^m(z,k^2)\quad m\in\{0,...,n-1\}$ $sdE_{2n+2}^m(z,k^2)=dn(z,k)\sum_{p=0}^{p=n-1}C_{2p+1}Cos((2p+1)\varphi)$
$Es_\nu^{2m+1}(z,k^2)$	$Es_\nu^{2m+1}(z,k^2)=\sum_{p=0}^{p=\infty}B_{2p+1}Sin((2p+1)\varphi)$ *Développement (17)*	$\begin{cases}\alpha_p=\frac{1}{2}(\nu-2p-2)(\nu+2p+3)k^2\\ \beta_p=\begin{cases}2-k^2-\frac{1}{2}\nu(\nu+1)k^2 & pour\quad p=0\\ (2p+1)^2(2-k^2) & pour\quad p\geq1\end{cases}\\ \gamma_p=\frac{1}{2}(\nu-2p+1)(\nu+2p)k^2\end{cases}$ *Formule (24)*	$\sum_{p=0}^{p=\infty}B_{2p+1}^{\ \ 2}=1$ $\sum_{p=0}^{p=\infty}(2p+1)B_{2p+1}>0$	$\nu=2n+1\quad p_{\max}=n$ *Type 3 (Arscott), Type 3 (NIST) :* $cE_{2n+1}^m(z,k^2)\quad m\in\{0,...,n\}$ $cE_{2n+1}^m(z,k^2)=\sum_{p=0}^{p=n}B_{2p+1}Sin((2p+1)\varphi)$
$Es_\nu^{2m+1}(z,k^2)$	$Es_\nu^{2m+1}(z,k^2)=dn(z,k)\sum_{p=0}^{p=\infty}D_{2p+1}Sin((2p+1)\varphi)$ *Développement (17)*	$\begin{cases}\alpha_p=\frac{1}{2}(\nu-2p-1)(\nu+2p+2)k^2\\ \beta_p=\begin{cases}2-k^2-\frac{1}{2}\nu(\nu+1)k^2 & pour\quad p=0\\ (2p+1)^2(2-k^2) & pour\quad p\geq1\end{cases}\\ \gamma_p=\frac{1}{2}(\nu-2p)(\nu+2p+1)k^2\end{cases}$ *Formule (25)*	$\left(1-\frac{k^2}{2}\right)\left\{\sum_{p=0}^{p=\infty}D_{2p+1}^{\ \ 2}\right\}+\frac{k^2}{2}\left\{\frac{D_1^{\ 2}}{2}-\sum_{p=0}^{p=\infty}D_{2p+1}D_{2p+3}\right\}=1$ $\sum_{p=0}^{p=\infty}(2p+1)D_{2p+1}>0$	$\nu=2n\quad p_{\max}=n-1\quad n>0$ *Type 5 (Arscott), Type 7 (NIST) :* $cdE_{2n}^m(z,k^2)\quad m\in\{0,...,n-1\}$ $cdE_{2n}^m(z,k^2)=dn(z,k)\sum_{p=0}^{p=n-1}D_{2p+1}Sin((2p+1)\varphi)$
$Es_\nu^{2m+2}(z,k^2)$	$Es_\nu^{2m+2}(z,k^2)=\sum_{p=0}^{p=\infty}B_{2p+2}Sin((2p+2)\varphi)$ *Développement (16)*	$\begin{cases}\alpha_p=\frac{1}{2}(\nu-2p-3)(\nu+2p+4)k^2\\ \beta_p=(2p+2)^2(2-k^2)\\ \gamma_p=\frac{1}{2}(\nu-2p)(\nu+2p+1)k^2\end{cases}$ *Formule (22)*	$\sum_{p=0}^{p=\infty}B_{2p+2}^{\ \ 2}=1$ $\sum_{p=0}^{p=\infty}(2p+1)B_{2p+2}>0$	$\nu=2n\quad p_{\max}=n-1\quad n>0$ *Type 6 (Arscott), Type 5 (NIST) :* $scE_{2n}^m(z,k^2)\quad m\in\{0,...,n-1\}$ $scE_{2n}^m(z,k^2)=\sum_{p=0}^{p=n-1}B_{2p+2}Sin((2p+2)\varphi)$
$Es_\nu^{2m+2}(z,k^2)$	$Es_\nu^{2m+2}(z,k^2)=dn(z,k)\sum_{p=0}^{p=\infty}D_{2p+2}Sin((2p+2)\varphi)$ *Développement (16)*	$\begin{cases}\alpha_p=\frac{1}{2}(\nu-2p-2)(\nu+2p+3)k^2\\ \beta_p=(2p+2)^2(2-k^2)\\ \gamma_p=\frac{1}{2}(\nu-2p-1)(\nu+2p+2)k^2\end{cases}$ *Formule (23)*	$\left(1-\frac{k^2}{2}\right)\left\{\sum_{p=0}^{p=\infty}D_{2p+2}^{\ \ 2}\right\}-\frac{k^2}{2}\left\{\sum_{p=0}^{p=\infty}D_{2p+2}D_{2p+4}\right\}=1$ $\sum_{p=0}^{p=\infty}(2p+2)D_{2p+2}>0$	$\nu=2n+1\quad p_{\max}=n-1\quad n>1$ *Type 8 (Arscott), Type 8 (NIST) :* $scdE_{2n+1}^m(z,k^2)\quad m\in\{0,...,n-1\}$ $scdE_{2n+1}^m(z,k^2)=dn(z,k)\sum_{p=0}^{p=n-1}D_{2p+2}Sin((2p+2)\varphi)$

Il est facile de se convaincre de l'équivalence entre la notation d'Ince (j'y ai rajouter d lorsque le développement alternatif commençant par dn(z,k) est proposé) et celle de NIST, à travers les 8 développements présentés comme suit :

Fonctions de Lamé périodiques Notation NIST	*Type de développement dans le livre « A.Erdélyi.H.Bateman, HIGHER TRANSCENDENTAL FUNCTIONS VOL III, Lamé-Heun Functions, chapitre XV, section 15.5.1», Repris dans « NIST Handbook of Mathematical Functions, chapitre 29, Lamé-Functions ».* $\varphi=\frac{\pi}{2}-am(z,k)=\frac{\pi}{2}-u$	*Fonctions de Lamé périodiques Notation Ince,*	*Type de développement tel que dans l'article d'E.L.Ince « VII—Further investigations into the periodic lamé functions» ;* $u=am(z,k)$
$Ec_\nu^{2m}(z,k^2)$	$Ec_\nu^{2m}(z,k^2)=\frac{A_0}{2}+\sum_{p=1}^{p=\infty}A_{2p}Cos(2p\varphi)$	$Ec_\nu^{2m}(z,k^2)$	$Ec_\nu^{2m}(z,k^2)=\frac{A_0}{2}+\sum_{p=1}^{p=\infty}A_{2p}(-1)^p Cos(2p\,u)$
$Ec_\nu^{2m}(z,k^2)$	$Ec_\nu^{2m}(z,k^2)=dn(z,k)\left\{\frac{C_0}{2}+\sum_{p=1}^{p=\infty}C_{2p}Cos(2p\varphi)\right\}$	$dEc_\nu^{2m}(z,k^2)$	$Ec_\nu^{2m}(z,k^2)=dn(z,k)\left\{\frac{C_0}{2}+\sum_{p=1}^{p=\infty}C_{2p}(-1)^p Cos(2p\,u)\right\}$
$Ec_\nu^{2m+1}(z,k^2)$	$Ec_\nu^{2m+1}(z,k^2)=\sum_{p=0}^{p=\infty}A_{2p+1}Cos((2p+1)\varphi)$	$Es_\nu^{2m+1}(z,k^2)$	$Es_\nu^{2m+1}(z,k^2)=\sum_{p=0}^{p=\infty}A_{2p+1}(-1)^p Sin((2p+1)u)$
$Ec_\nu^{2m+1}(z,k^2)$	$Ec_\nu^{2m+1}(z,k^2)=dn(z,k)\sum_{p=0}^{p=\infty}C_{2p+1}Cos((2p+1)\varphi)$	$dEs_\nu^{2m+1}(z,k^2)$	$Es_\nu^{2m+1}(z,k^2)=dn(z,k)\sum_{p=0}^{p=\infty}C_{2p+1}(-1)^p Sin((2p+1)u)$
$Es_\nu^{2m+1}(z,k^2)$	$Es_\nu^{2m+1}(z,k^2)=\sum_{p=0}^{p=\infty}B_{2p+1}Sin((2p+1)\varphi)$	$Ec_\nu^{2m+1}(z,k^2)$	$Ec_\nu^{2m+1}(z,k^2)=\sum_{p=0}^{p=\infty}B_{2p+1}(-1)^p Cos((2p+1)u)$
$Es_\nu^{2m+1}(z,k^2)$	$Es_\nu^{2m+1}(z,k^2)=dn(z,k)\sum_{p=0}^{p=\infty}D_{2p+1}Sin((2p+1)\varphi)$	$dEc_\nu^{2m+1}(z,k^2)$	$Ec_\nu^{2m+1}(z,k^2)=dn(z,k)\sum_{p=0}^{p=\infty}D_{2p+1}(-1)^p Cos((2p+1)u)$
$Es_\nu^{2m+2}(z,k^2)$	$Es_\nu^{2m+2}(z,k^2)=\sum_{p=0}^{p=\infty}B_{2p+2}Sin((2p+2)\varphi)$	$Es_\nu^{2m+2}(z,k^2)$	$Es_\nu^{2m+2}(z,k^2)=\sum_{p=0}^{p=\infty}B_{2p+2}(-1)^p Sin((2p+2)u)$
$Es_\nu^{2m+2}(z,k^2)$	$Es_\nu^{2m+2}(z,k^2)=dn(z,k)\sum_{p=0}^{p=\infty}D_{2p+2}Sin((2p+2)\varphi)$	$dEs_\nu^{2m+2}(z,k^2)$	$Es_\nu^{2m+2}(z,k^2)=dn(z,k)\sum_{p=0}^{p=\infty}D_{2p+2}(-1)^p Sin((2p+2)u)$

Remarque:il est clair que tous les coefficients des développements ne diffèrent que d'un signe près $(-1)^p$. D'autre part dans la notation d'Ince, les propriétés de parité suivant z sont plus cohérente avec l'emploi de la fonction sinusoïdale de parité usuelle. De ce point de vue la notation d'Ince est plus cohérente que celle utilisée par NIST (interchange des Ec et Es d'ordre impaire) et rejoint celle des fonctions de Mathieu (Ec, Es pour ce, se).

<u>Algorithme de construction des solutions périodiques 2K et 4K de l'équation de Lamé par le développement en fonctions elliptiques de Jacobi</u>

Les 8 fonctions de Lamé périodiques 2K et 4K sont essentiellement les mêmes que les précédentes. Il s'agit simplement d'un développement et d'un facteur de normalisation différent. On peut par exemple choisir de poser le premier coefficient du développement dans la sommation comme étant égal à 1. <u>Cela entraîne bien évidemment une fonctions de Lamé qui diffère uniquement d'un facteur de normalisation</u>. La récurrence est celle décrite dans l'article fondateur de 1940 de E.L.Ince « V.—The periodic lamé functions ».

Le schéma de construction se présente génériquement comme la recherche des valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice tri-diagonale :

$$\left(\mathbf{M}_\infty - h\mathbf{I}_\infty\right)\mathbf{X}_\infty = 0 \quad \mathbf{M}_\infty = \begin{bmatrix} \beta_0 & \alpha_0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & \ldots & \ldots \\ \gamma_1 & \beta_1 & \alpha_1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ \ldots & 0 & \gamma_{N-3} & \beta_{N-3} & \alpha_{N-3} & 0 & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & 0 & \gamma_{N-2} & \beta_{N-2} & \alpha_{N-2} & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \gamma_{N-1} & \beta_{N-1} & \alpha_{N-1} & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \gamma_N & \beta_N & \ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{bmatrix} \quad \mathbf{X}_\infty = \left[x_0,\ldots,x_{N-1},x_N,\ldots\right]^t$$

$$\begin{cases} h_m \quad \text{valeurs propres} \\ x_m(h_m) \quad \text{vecteurs propres de} \\ m \in \{0,1,2,..,N,..\} \end{cases} \mathbf{M}_\infty \Rightarrow \begin{cases} Ec_\nu^{2m}\left(z,k^2\right) = \sum_{r=0}^{r=\infty} x_{r,m}(h_m) sn^{2r}(z,k) \quad ou \quad dEc_\nu^{2m}\left(z,k^2\right) = dn(z,k)\sum_{r=0}^{r=\infty} x_{r,m}(h_m) sn^{2r}(z,k) \\ Ec_\nu^{2m+1}\left(z,k^2\right) = \mathrm{c}n(z,k)\sum_{r=0}^{r=\infty} x_{r,m}(h_m) sn^{2r}(z,k) \quad ou \quad dEc_\nu^{2m+1}\left(z,k^2\right) = \mathrm{c}n(z,k) dn(z,k)\sum_{r=0}^{r=\infty} x_{r,m}(h_m) sn^{2r}(z,k) \\ Es_\nu^{2m+1}\left(z,k^2\right) = \sum_{r=0}^{r=\infty} x_{r,m}(h_m) sn^{2r+1}(z,k) \quad ou \quad dEs_\nu^{2m+1}\left(z,k^2\right) = dn(z,k)\sum_{r=0}^{r=\infty} x_{r,m}(h_m) sn^{2r+1}(z,k) \\ Es_\nu^{2m+2}\left(z,k^2\right) = \mathrm{c}n(z,k)\sum_{r=0}^{r=\infty} x_{r,m}(h_m) sn^{2r+1}(z,k) \quad ou \quad Es_\nu^{2m+2}\left(z,k^2\right) = \mathrm{c}n(z,k) dn(z,k)\sum_{r=0}^{r=\infty} x_{r,m}(h_m) sn^{2r+1}(z,k) \end{cases}$$

$$\text{Récurrence} \quad \begin{cases} \gamma_0 = 0 \quad x_{-1} = 0 \\ x_0 = 1 \quad \Leftarrow \quad \text{normalisation} \\ \beta_0 x_0 + \alpha_1 x_1 = h\, x_0 \\ \gamma_r x_{r-1} + \beta_r x_r + \alpha_r x_{r+1} = h\, x_r \Leftrightarrow \alpha_r x_{r+1} + \beta_r x_r + \gamma_r x_{r-1} = h\, x_r \\ \ldots \end{cases}$$

Fonctions de Lamé périodiques Notation Ince	*Fonctions de Lamé périodiques Notation NIST/Erdelyi*	*Type de développement / Normalisation*	*Récurrence forme 1*	*Récurrence forme 2*	*Cas d'un développement fini : polynôme de Lamé et type, notation et développement d'Arscott*	*Récurrence du polynôme de Lamé selon Arscott :* α_r,γ_r *change de signe et assignation de* ν *.* β_r*, ne change pas de signe*
$Ec_\nu^{2m}(z,k^2)$	$Ec_\nu^{2m}(z,k^2)$	$Ec_\nu^{2m}(z,k^2)=\sum_{r=0}^{r=\infty}A_{2r}sn^{2r}(z,k)$ *Normalisation* $A_0=1$	$\begin{cases}2A_2+hA_0=0\\(2r+1)(2r+2)A_{2r+2}+\\+(h-4r^2(1+k^2))A_{2r}-\\-(\nu-2r+2)(\nu+2r-1)k^2A_{2r-2}=0\end{cases}$	$\begin{cases}\alpha_r=-(2r+1)(2r+2)\\\beta_r=4r^2(1+k^2)\\\gamma_r=(\nu-2r+2)(\nu+2r-1)k^2\end{cases}$	$\nu=2n\geq 0 \quad r_{\max}=n$ *Type 1 (Arscott), Type 1 (NIST) :* $uE_{2n}^m(z,k^2) \quad m\in\{0,...,n\}$ $uE_{2n}^m(z,k^2)=\sum_{r=0}^{r=n}(-1)^r A_{2r}sn^{2r}(z,k)$	$\begin{cases}\alpha_r=(2r+1)(2r+2)\\\beta_r=4r^2(1+k^2)\\\gamma_r=-(2n-2r+2)(2n+2r-1)k^2\end{cases}$
$dEc_\nu^{2m}(z,k^2)$	$Ec_\nu^{2m}(z,k^2)$	$dEc_\nu^{2m}(z,k^2)=dn(z,k)\sum_{r=0}^{r=\infty}C_{2r}sn^{2r}(z,k)$ *Normalisation* $C_0=1$	$\begin{cases}2C_2+(h-k^2)C_0=0\\(2r+1)(2r+2)C_{2r+2}+\\+(h-4r^2-(2r+1)k^2)C_{2r}-\\-(\nu-2r+1)(\nu+2r)k^2C_{2r-2}=0\end{cases}$	$\begin{cases}\alpha_r=-(2r+1)(2r+2)\\\beta_r=4r^2+(2r+1)^2k^2\\\gamma_r=(\nu-2r+1)(\nu+2r)k^2\end{cases}$	$\nu=2n+1 \quad r_{\max}=n$ *Type 4 (Arscott), Type 4 (NIST) :* $dE_{2n+1}^m(z,k^2) \quad m\in\{0,...,n\}$ $dE_{2n+1}^m(z,k^2)=dn(z,k)\sum_{r=0}^{r=n}(-1)^r C_{2r}sn^{2r}(z,k)$	$\begin{cases}\alpha_r=(2r+1)(2r+2)\\\beta_r=4r^2+(2r+1)^2k^2\\\gamma_r=-(2n-2r+2)(2n+2r+1)k^2\end{cases}$
$Ec_\nu^{2m+1}(z,k^2)$	$Es_\nu^{2m+1}(z,k^2)$	$Ec_\nu^{2m+1}(z,k^2)=cn(z,k)\sum_{r=0}^{r=\infty}A_{2r}sn^{2r}(z,k)$ *Normalisation* $A_0=1$	$\begin{cases}2A_2+(h-1)A_0=0\\(2r+1)(2r+2)A_{2r+2}+\\+(h-(2r+1)^2-4r^2k^2)A_{2r}-\\-(\nu-2r+1)(\nu+2r)k^2A_{2r-2}=0\end{cases}$	$\begin{cases}\alpha_r=-(2r+1)(2r+2)\\\beta_r=(2r+1)^2+4r^2k^2\\\gamma_r=(\nu-2r+1)(\nu+2r)k^2\end{cases}$	$\nu=2n+1 \quad r_{\max}=n$ *Type 3 (Arscott), Type 3 (NIST) :* $cE_{2n+1}^m(z,k^2) \quad m\in\{0,...,n\}$ $cE_{2n+1}^m(z,k^2)=cn(z,k)\sum_{r=0}^{r=n}(-1)^r A_{2r}sn^{2r}(z,k)$	$\begin{cases}\alpha_r=(2r+1)(2r+2)\\\beta_r=(2r+1)^2+4r^2k^2\\\gamma_r=-(2n-2r+2)(2n+2r+1)k\end{cases}$
$dEc_\nu^{2m+1}(z,k^2)$	$Es_\nu^{2m+1}(z,k^2)$	$dEc_\nu^{2m+1}(z,k^2)=cn(z,k)dn(z,k)\sum_{r=0}^{r=\infty}C_{2r}sn^{2r}(z,k)$ *Normalisation* $C_0=1$	$\begin{cases}2C_2+(h-1-k^2)C_0=0\\(2r+1)(2r+2)C_{2r+2}+\\+(h-4r^2-(2r+1)(1+k^2))C_{2r}-\\-(\nu-2r)(\nu+2r+1)k^2C_{2r-2}=0\end{cases}$	$\begin{cases}\alpha_r=-(2r+1)(2r+2)\\\beta_r=(2r+1)^2(1+k^2)\\\gamma_r=(\nu-2r)(\nu+2r+1)k^2\end{cases}$	$\nu=2n>0 \quad r_{\max}=n-1$ *Type 5 (Arscott), Type 7 (NIST) :* $cdE_{2n}^m(z,k^2) \quad m\in\{1,...,n\}$ $cdE_{2n}^m(z,k^2)=cn(z,k)dn(z,k)\sum_{r=0}^{r=n-1}(-1)^r C_{2r}sn^{2r}(z,k)$	$\begin{cases}\alpha_r=(2r+1)(2r+2)\\\beta_r=(2r+1)^2(1+k^2)\\\gamma_r=-(2n-2r)(2n+2r+1)k^2\end{cases}$
$Es_\nu^{2m+1}(z,k^2)$	$Ec_\nu^{2m+1}(z,k^2)$	$Es_\nu^{2m+1}(z,k^2)=sn(z,k)\sum_{r=0}^{r=\infty}B_{2r+1}sn^{2r}(z,k)$ *Normalisation* $B_1=1$	$\begin{cases}2\times 3B_3+(h-1-k^2)B_1=0\\(2r+2)(2r+3)B_{2r+3}+\\+(h-(2r+1)^2(1+k^2))B_{2r+1}-\\-(\nu-2r+1)(\nu+2r)k^2B_{2r-1}=0\end{cases}$	$\begin{cases}\alpha_r=-(2r+2)(2r+3)\\\beta_r=(2r+1)^2(1+k^2)\\\gamma_r=(\nu-2r+1)(\nu+2r)k^2\end{cases}$	$\nu=2n+1 \quad r_{\max}=n$ *Type 2 (Arscott), Type 2 (NIST) :* $sE_{2n+1}^m(z,k^2) \quad m\in\{0,...,n\}$ $sE_{2n+1}^m(z,k^2)=sn(z,k)\sum_{r=0}^{r=n}(-1)^r B_{2r+1}sn^{2r}(z,k)$	$\begin{cases}\alpha_r=(2r+2)(2r+3)\\\beta_r=(2r+1)^2(1+k^2)\\\gamma_r=-(2n-2r+2)(2n+2r+1)k\end{cases}$
$dEs_\nu^{2m+1}(z,k^2)$	$Ec_\nu^{2m+1}(z,k^2)$	$dEs_\nu^{2m+1}(z,k^2)=dn(z,k)sn(z,k)\sum_{r=0}^{r=\infty}D_{2r+1}sn^{2r}(z,k)$ *Normalisation* $D_1=1$	$\begin{cases}2\times 3D_3+(h-1-4k^2)D_1=0\\(2r+2)(2r+3)D_{2r+3}+\\+(h-(2r+1)^2-(2r+2)^2k^2)D_{2r+1}-\\-(\nu-2r)(\nu+2r+1)k^2D_{2r-1}=0\end{cases}$	$\begin{cases}\alpha_r=-(2r+2)(2r+3)\\\beta_r=(2r+1)^2+(2r+2)^2k^2\\\gamma_r=(\nu-2r)(\nu+2r+1)k^2\end{cases}$	$\nu=2n>0 \quad r_{\max}=n-1$ *Type 7 (Arscott), Type 6 (NIST) :* $sdE_{2n}^m(z,k^2) \quad m\in\{1,...,n\}$ $sdE_{2n}^m(z,k^2)=dn(z,k)sn(z,k)\sum_{r=0}^{r=n-1}(-1)^r D_{2r+1}sn^{2r}(z,k)$	$\begin{cases}\alpha_r=(2r+2)(2r+3)\\\beta_r=(2r+1)^2+(2r+2)^2k^2\\\gamma_r=-(2n-2r)(2n+2r+1)k^2\end{cases}$
$Es_\nu^{2m+2}(z,k^2)$	$Es_\nu^{2m+2}(z,k^2$	$Es_\nu^{2m+2}(z,k^2)=sn(z,k)cn(z,k)\sum_{r=0}^{r=\infty}B_{2r+1}sn^{2r}(z,k)$ *Normalisation* $B_1=1$	$\begin{cases}2\times 3B_3+(h-4-k^2)B_1=0\\(2r+2)(2r+3)B_{2r+3}+\\+(h-(2r+2)^2-(2r+1)^2k^2)B_{2r+1}-\\-(\nu-2r)(\nu+2r+1)k^2B_{2r-1}=0\end{cases}$	$\begin{cases}\alpha_r=-(2r+2)(2r+3)\\\beta_r=(2r+2)^2+(2r+1)^2k^2\\\gamma_r=(\nu-2r)(\nu+2r+1)k^2\end{cases}$	$\nu=2n>0 \quad r_{\max}=n-1$ *Type 6 (Arscott), Type 5 (NIST) :* $scE_{2n}^m(z,k^2) \quad m\in\{1,...,n\}$ $scE_{2n}^m(z,k^2)=sn(z,k)cn(z,k)\sum_{r=0}^{r=n-1}(-1)^r B_{2r+1}sn^{2r}(z,k)$	$\begin{cases}\alpha_r=(2r+2)(2r+3)\\\beta_r=(2r+2)^2+(2r+1)^2k^2\\\gamma_r=-(2n-2r)(2n+2r+1)k^2\end{cases}$
$dEs_\nu^{2m+2}(z,k^2)$	$Es_\nu^{2m+2}(z,k^2)$	$dEs_\nu^{2m+2}(z,k^2)=dn(z,k)sn(z,k)cn(z,k)\sum_{r=0}^{r=\infty}D_{2r+1}sn^{2r}(z,k)$ *Normalisation* $D_1=1$	$\begin{cases}2\times 3D_3+(h-4-4k^2)D_1=0\\(2r+2)(2r+3)D_{2r+3}+\\+(h-(2r+2)^2(1+k^2))D_{2r+1}-\\-(\nu-2r-1)(\nu+2r+2)k^2D_{2r-1}=0\end{cases}$	$\begin{cases}\alpha_r=-(2r+2)(2r+3)\\\beta_r=(2r+2)^2(1+k^2)\\\gamma_r=(\nu-2r-1)(\nu+2r+2)k^2\end{cases}$	$\nu=2n+1>1 \quad r_{\max}=n-1$ *Type 8 (Arscott), Type 8 (NIST) :* $scdE_{2n+1}^m(z,k^2) \quad m\in\{1,...,n\}$ $scdE_{2n+1}^m(z,k^2)=dn(z,k)sn(z,k)cn(z,k)\sum_{r=0}^{r=n-1}(-1)^r D_{2r+1}sn^{2r}(z,k)$	$\begin{cases}\alpha_r=(2r+2)(2r+3)\\\beta_r=(2r+2)^2(1+k^2)\\\gamma_r=-(2n-2r)(2n+2r+3)k^2\end{cases}$

__Exemple des premières fonctions de Lamé de périodes 2K et 4K développées en fonctions elliptiques de Jacobi__

Les premières fonctions de Lamé telles que développées par Ince sont aisément calculables car les valeurs propres h ont une expression relativement simple. Il s'agit évidemment également des expressions des polynômes de Lamé puisque le développement est fini.

$$\nu=0 \quad m=0 \quad h=0 \quad Ec_0^0(z,k^2)=1$$
$$\nu=1 \quad m=0 \quad h=k^2 \quad dEc_1^0(z,k^2)=dn(z,k)$$
$$\nu=2 \quad m=0 \quad h=2\left(1+k^2-\sqrt{1-k^2+k^4}\right) \quad Ec_2^0(z,k^2)=1-\left(1+k^2-\sqrt{1-k^2+k^4}\right)sn^2(z,k)$$
$$\nu=2 \quad m=2 \quad h=2\left(1+k^2+\sqrt{1-k^2+k^4}\right) \quad Ec_2^2(z,k^2)=1-\left(1+k^2+\sqrt{1-k^2+k^4}\right)sn^2(z,k)$$
$$\nu=3 \quad m=0 \quad h=2+5k^2-2\sqrt{1-k^2+4k^4} \quad dEc_3^0(z,k^2)=dn(z,k)\left\{1-\left(1+2k^2-\sqrt{1-k^2+4k^4}\right)sn^2(z,k)\right\}$$
$$\nu=3 \quad m=2 \quad h=2+5k^2+2\sqrt{1-k^2+4k^4} \quad dEc_3^2(z,k^2)=dn(z,k)\left\{1-\left(1+2k^2+\sqrt{1-k^2+4k^4}\right)sn^2(z,k)\right\}$$

$$\nu=1 \quad m=1 \quad h=1 \quad Ec_1^1(z,k^2)=cn(z,k)$$
$$\nu=2 \quad m=1 \quad h=1+k^2 \quad dEc_2^1(z,k^2)=dn(z,k)cn(z,k)$$
$$\nu=3 \quad m=1 \quad h=5+2k^2-2\sqrt{4-k^2+k^4} \quad Ec_3^1(z,k^2)=cn(z,k)\left\{1-\left(2+k^2-\sqrt{4-k^2+k^4}\right)sn^2(z,k)\right\}$$
$$\nu=3 \quad m=3 \quad h=5+2k^2+2\sqrt{4-k^2+k^4} \quad Ec_3^3(z,k^2)=cn(z,k)\left\{1-\left(2+k^2+\sqrt{4-k^2+k^4}\right)sn^2(z,k)\right\}$$
$$\nu=4 \quad m=1 \quad h=5+5k^2-2\sqrt{4+k^2+4k^4} \quad dEc_4^1(z,k^2)=dn(z,k)cn(z,k)\left\{1-\left(2+2k^2-\sqrt{4+k^2+4k^4}\right)sn^2(z,k)\right\}$$
$$\nu=4 \quad m=3 \quad h=5+5k^2+2\sqrt{4+k^2+4k^4} \quad dEc_4^3(z,k^2)=dn(z,k)cn(z,k)\left\{1-\left(2+2k^2+\sqrt{4+k^2+4k^4}\right)sn^2(z,k)\right\}$$

$$\nu=1 \quad m=1 \quad h=1+k^2 \quad Es_1^1(z,k^2)=sn(z,k)$$
$$\nu=2 \quad m=1 \quad h=1+4k^2 \quad dEs_2^1(z,k^2)=dn(z,k)sn(z,k)$$
$$\nu=3 \quad m=1 \quad h=5+5k^2-2\sqrt{4-7k^2+4k^4} \quad Es_3^1(z,k^2)=sn(z,k)\left\{1-\frac{1}{3}\left(2+2k^2-\sqrt{4-7k^2+4k^4}\right)sn^2(z,k)\right\}$$
$$\nu=3 \quad m=3 \quad h=5+5k^2+2\sqrt{4-7k^2+4k^4} \quad Es_3^3(z,k^2)=sn(z,k)\left\{1-\frac{1}{3}\left(2+2k^2+\sqrt{4-7k^2+4k^4}\right)sn^2(z,k)\right\}$$
$$\nu=4 \quad m=1 \quad h=5+10k^2-2\sqrt{4-9k^2+9k^4} \quad dEs_4^1(z,k^2)=dn(z,k)sn(z,k)\left\{1-\frac{1}{3}\left(2+3k^2-\sqrt{4-9k^2+9k^4}\right)sn^2(z,k)\right\}$$
$$\nu=4 \quad m=3 \quad h=5+10k^2+2\sqrt{4-9k^2+9k^4} \quad dEs_4^3(z,k^2)=dn(z,k)sn(z,k)\left\{1-\frac{1}{3}\left(2+3k^2+\sqrt{4-9k^2+9k^4}\right)sn^2(z,k)\right\}$$

$$\nu=2 \quad m=2 \quad h=4+k^2 \quad Es_2^2(z,k^2)=cn(z,k)sn(z,k)$$
$$\nu=3 \quad m=2 \quad h=4(1+k^2) \quad dEs_3^2(z,k^2)=dn(z,k)cn(z,k)sn(z,k)$$
$$\nu=4 \quad m=2 \quad h=10+5k^2-2\sqrt{9-9k^2+4k^4} \quad Es_2^2(z,k^2)=cn(z,k)sn(z,k)\left\{1-\frac{1}{3}\left(3+2k^2-\sqrt{9-9k^2+4k^4}\right)sn^2(z,k)\right\}$$
$$\nu=4 \quad m=4 \quad h=10+5k^2+2\sqrt{9-9k^2+4k^4} \quad Es_2^4(z,k^2)=cn(z,k)sn(z,k)\left\{1-\frac{1}{3}\left(3+2k^2+\sqrt{9-9k^2+4k^4}\right)sn^2(z,k)\right\}$$
$$\nu=5 \quad m=2 \quad h=2\left(5+5k^2-3\sqrt{1-k^2+k^4}\right) \quad dEs_5^2(z,k^2)=dn(z,k)cn(z,k)sn(z,k)\left\{1-\left(1+k^2-\sqrt{1-k^2+k^4}\right)sn^2(z,k)\right\}$$
$$\nu=5 \quad m=4 \quad h=2\left(5+5k^2+3\sqrt{1-k^2+k^4}\right) \quad dEs_5^4(z,k^2)=dn(z,k)cn(z,k)sn(z,k)\left\{1-\left(1+k^2+\sqrt{1-k^2+k^4}\right)sn^2(z,k)\right\}$$

Au delà les valeurs de h sont des racines de polynômes de degré 3 et plus, qui n'ont pas directement d'expressions algébriques.

Constructions des solutions de l'équation de Lamé de période purement imaginaire 2iK'et 4iK'

Il s'agit ici de construire les solutions de période imaginaire de l'équation de Lamé :

$$y''(z)+\left(h-\nu(\nu+1)k^2 sn^2(z,k)\right)y(z)=0$$

telles que $\begin{cases} y(z+2iK(k'))=y(z) \\ ou \quad y(z+4iK(k'))=y(z) \end{cases}$ $k'=\sqrt{1-k^2}$ *. Pour cela la construction est assez simple, il suffit d'effectuer un changement de variable dans l'argument z sachant que :*

$$\tilde{z}=i\left(z-K(k)-iK(k')\right) \qquad \begin{cases} sn(\tilde{z},k')=\dfrac{dn(z,k)}{k'} & cn(\tilde{z},k')=i\dfrac{k\,cn(z,k)}{k'} & dn(\tilde{z},k')=k\,sn(z,k) \\ sn(z,k)=\dfrac{dn(\tilde{z},k')}{k} & cn(z,k)=-i\dfrac{k'\,cn(\tilde{z},k')}{k} & dn(z,k)=k'\,sn(\tilde{z},k') \end{cases}$$

L'équation de Lamé dans la nouvelle variable s'écrit :

$$\begin{aligned} & y''(\tilde{z})-\left(h-\nu(\nu+1)dn^2(\tilde{z},k')\right)y(\tilde{z})=0 \\ \Leftrightarrow\ & y''(\tilde{z})+\left(\nu(\nu+1)-h+\nu(\nu+1)k'^2\,dn^2(\tilde{z},k')\right)y(\tilde{z})=0 \end{aligned}$$

Dans la nouvelle variable, la fonction est de période réelle 2K' ou 4K' :

$$\begin{cases} y(z+2iK(k'))=y(z) \\ ou \quad y(z+4iK(k'))=y(z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(\tilde{z}+2K(k'))=y(z) \\ ou \quad y(\tilde{z}+4K(k'))=y(z) \end{cases}$$

Le procédé de construction des fonctions que je nomme ***Eic*** *et* ***Eis*** *est donc finalement assez simple :*
- réaliser l'algorithme de construction d'un fonction périodique de période 2K' ou 4K', avec le paramètre k'
- les coefficients trouvés sont les vecteurs propres de la matrice construite avec les coefficients k' mais de valeur propre égale à v(v+1)-h, et l'identification des fonctions Eic et Eis se réalise comme suit :

$$\begin{cases} Eic_\nu^{2m}\left(z+2iK(k'),k^2\right)=Eic_\nu^{2m}\left(z+2iK(k'),k^2\right)\Rightarrow Eic_\nu^{2m}\left(z,k^2\right)=Ec_\nu^{2m}\left(\tilde{z},k'^2\right) \\ Eic_\nu^{2m+1}\left(z+4iK(k'),k^2\right)=Eic_\nu^{2m+1}\left(z+4iK(k'),k^2\right)\Rightarrow Eic_\nu^{2m+1}\left(z,k^2\right)=Ec_\nu^{2m+1}\left(\tilde{z},k'^2\right) \\ Eis_\nu^{2m+1}\left(z+4iK(k'),k^2\right)=Eis_\nu^{2m+1}\left(z+4iK(k'),k^2\right)\Rightarrow Eis_\nu^{2m+1}\left(z,k^2\right)=Es_\nu^{2m+1}\left(\tilde{z},k'^2\right) \\ Eis_\nu^{2m+2}\left(z+2iK(k'),k^2\right)=Eis_\nu^{2m+2}\left(z+2iK(k'),k^2\right)\Rightarrow Eis_\nu^{2m+2}\left(z,k^2\right)=Es_\nu^{2m+2}\left(\tilde{z},k'^2\right) \end{cases}$$

Les propriétés de parité des fonctions de période imaginaire se déduisent des propriétés des fonctions initiales de période réelles, soit :

$$\begin{cases} z=K(k)+iK(k')-i\,\tilde{z} \\ \tilde{z}\to 2K(k')-\tilde{z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K(k)-iK(k')+i\,\tilde{z}=2K(k)-z \\ z\to 2K(k)-z \end{cases}$$

$$\begin{cases} Ec_\nu^{2m}\left(2K(k')-\tilde{z},k'^2\right)=Ec_\nu^{2m}\left(\tilde{z},k'^2\right)\Rightarrow Eic_\nu^{2m}\left(2K(k)-z,k^2\right)=Eic_\nu^{2m}\left(z,k^2\right) \\ Ec_\nu^{2m+1}\left(2K(k')-\tilde{z},k'^2\right)=Ec_\nu^{2m+1}\left(\tilde{z},k'^2\right)\Rightarrow Eic_\nu^{2m+1}\left(2K(k)-z,k^2\right)=Eic_\nu^{2m+1}\left(z,k^2\right) \\ Es_\nu^{2m+1}\left(2K(k')-\tilde{z},k'^2\right)=-Es_\nu^{2m+1}\left(\tilde{z},k'^2\right)\Rightarrow Eis_\nu^{2m+1}\left(2K(k)-z,k^2\right)=-Eis_\nu^{2m+1}\left(z,k^2\right) \\ Es_\nu^{2m+2}\left(2K(k')-\tilde{z},k'^2\right)=-Es_\nu^{2m+2}\left(\tilde{z},k'^2\right)\Rightarrow Eis_\nu^{2m+2}\left(2K(k)-z,k^2\right)=-Eis_\nu^{2m+2}\left(z,k^2\right) \end{cases}$$

La parité sur z entraîne les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} z = K(k) + iK(k') - i\tilde{z} \\ \tilde{z} \to -\tilde{z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K(k) + iK(k') + i\tilde{z} = 2K(k) + 2iK(k') - z \\ z \to 2K(k) + 2iK(k') - z \end{cases}$$

$$\begin{cases} Ec_\nu^{2m}(-\tilde{z},k'^2) = Ec_\nu^{2m}(\tilde{z},k'^2) \Rightarrow Eic_\nu^{2m}(2K(k)+2iK(k')-z,k^2) = Eic_\nu^{2m}(z-2iK(k'),k^2) = Eic_\nu^{2m}(z,k^2) \\ Ec_\nu^{2m+1}(-\tilde{z},k'^2) = -Ec_\nu^{2m+1}(\tilde{z},k'^2) \Rightarrow Eic_\nu^{2m+1}(2K(k)+2iK(k')-z,k^2) = Eic_\nu^{2m+1}(z-2iK(k'),k^2) = Eic_\nu^{2m+1}(z+2iK(k'),k^2) = -Eic_\nu^{2m+1}(z,k^2) \\ Es_\nu^{2m+1}(-\tilde{z},k'^2) = Es_\nu^{2m+1}(\tilde{z},k'^2) \Rightarrow Eis_\nu^{2m+1}(2K(k)+2iK(k')-z,k^2) = -Eis_\nu^{2m+1}(z-2iK(k'),k^2) = -Eis_\nu^{2m+1}(z+2iK(k'),k^2) = Eis_\nu^{2m+1}(z,k^2) \\ Es_\nu^{2m+2}(-\tilde{z},k'^2) = -Es_\nu^{2m+2}(\tilde{z},k'^2) \Rightarrow Eis_\nu^{2m+2}(2K(k)+2iK(k')-z,k^2) = -Eis_\nu^{2m+2}(z-2iK(k'),k^2) = -Eis_\nu^{2m+2}(z,k^2) \end{cases}$$

__Construction des solutions périodiques d'équations modifiés de Lamé__

Finalement la construction précédentes nous a permit d'affirmer que les solutions périodiques de l'équation modifiée de Lamé :

$$y''(\tilde{z}) - (h - \nu(\nu+1)dn^2(\tilde{z},k'))y(\tilde{z}) = 0$$

correspondaient aux fonctions périodiques construites sur le paramètre k' mais avec des valeurs propres égale à v(v+1)-h, h étant les valeurs propres obtenues avec le paramètre k'.

Continuons ces transformation en considérant l'argument z=K(k)+iz', cela donne :

$$\begin{cases} \tilde{z} = i(z - K(k) - iK(k')) \\ z = K(k) + i\tilde{\tilde{z}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{z} = i(i\tilde{\tilde{z}} - iK(k')) = K(k') - \tilde{\tilde{z}} \\ \tilde{\tilde{z}} = K(k') - \tilde{z} \end{cases}$$

En conséquence modifions l'équation :

$$y''(\tilde{\tilde{z}}) - \left(h - \frac{\nu(\nu+1)}{dn^2(\tilde{z},k')}k^2\right)y(\tilde{\tilde{z}}) = 0$$

qui possède les mêmes valeurs propres que l'équation $y''(\tilde{z}) - (h - \nu(\nu+1)dn^2(\tilde{z},k'))y(\tilde{z}) = 0$*, avec des fonctions périodique construites avec :*

$$\begin{cases} Ec_\nu^{2m}(\tilde{\tilde{z}},k'^2) = Ec_\nu^{2m}(K(k') - \tilde{z},k'^2) \qquad Ec_\nu^{2m+1}(\tilde{\tilde{z}},k'^2) = Ec_\nu^{2m+1}(K(k') - \tilde{z},k'^2) \\ Es_\nu^{2m+1}(\tilde{\tilde{z}},k'^2) = Es_\nu^{2m+1}(K(k') - \tilde{z},k'^2) \qquad Es_\nu^{2m+2}(\tilde{\tilde{z}},k'^2) = Es_\nu^{2m+2}(K(k') - \tilde{z},k'^2) \end{cases}$$

Si maintenant on revient à l'équation de Lamé originale : $y''(z) + (h - \nu(\nu+1)k^2 sn^2(z,k))y(z) = 0$*. Par la transformation* $\tilde{z} = K(k) - z$*, il vient une __équation modifiée de Lamé de même valeur propre h__:*

$$y''(\tilde{z}) + \left(h - \nu(\nu+1)k^2 \frac{cn^2(z,k)}{dn^2(z,k)}\right)y(z) = 0$$

Dont les solutions de période réelle sont construites comme suit :

$$\begin{cases} Ec_\nu^{2m}(\tilde{z},k^2) = Ec_\nu^{2m}(K(k) - z,k^2) \qquad Ec_\nu^{2m+1}(\tilde{z},k^2) = Ec_\nu^{2m+1}(K(k) - z,k^2) \\ Es_\nu^{2m+1}(\tilde{z},k^2) = Es_\nu^{2m+1}(K(k) - z,k^2) \qquad Es_\nu^{2m+2}(\tilde{z},k^2) = Es_\nu^{2m+2}(K(k) - z,k^2) \end{cases}$$

Polynômes de Lamé, cas d'un développement fini

Voici un tableau exprimant les huit types de développements possibles des polynômes de Lamé avec leur différente notation établie dans les divers articles fondateurs :

Type de polynôme de Lamé (Arscott)	*Type de polynôme de Lamé (NIST)*	*Notation et développement d'Arscott*	*Récurrence du polynôme de Lamé selon Arscott*	*Notation et développement de Fourier de NIST*	*Récurrence du polynôme de Lamé selon NIST, formule dans « A.Erdélyi.H.Bateman, HIGHER TRANSCENDENTAL FUNCTIONS VOL III, Lamé-Heun Functions, chapitre XV , section 15.5.1»*	*Normalisation NIST*
1	1	$uE_{2n}^m(z,k^2)\quad m\in\{0,\dots,n\}\quad n\geq 0$ $uE_{2n}^m(z,k^2)=\sum_{r=0}^{r=n}A_{2r}sn^{2r}(z,k)$ *Normalisation* $A_0=1$	$\begin{cases}\alpha_r=(2r+1)(2r+2)\\ \beta_r=4r^2(1+k^2)\\ \gamma_r=-(2n-2r+2)(2n+2r-1)k^2\end{cases}$	$uE_{2n}^m(z,k^2)\quad m\in\{0,\dots,n\}\quad n\geq 0$ $uE_{2n}^m(z,k^2)=\frac{A_0}{2}+\sum_{p=1}^{p=n}A_{2p}Cos(2p\varphi)$	$\begin{cases}\alpha_p=\begin{cases}(2n-1)(2n+2)k^2 \quad pour \quad p=0\\ \frac{1}{2}(2n-2p-1)(2n+2p+2)k^2 \quad pour \quad p\geq 1\end{cases}\\ \beta_p=4p^2(2-k^2)\\ \gamma_p=\frac{1}{2}(2n-2p+2)(2n+2p-1)k^2\end{cases}$ *Formule (18) avec v=2n*	$\frac{A_0{}^2}{2}+\sum_{p=1}^{p=n}A_{2p}{}^2=1$ $\frac{A_0}{2}+\sum_{p=1}^{p=n}A_{2p}>0$ *ou* $A_0=1$
2	2	$sE_{2n+1}^m(z,k^2)\quad m\in\{0,\dots,n\}\quad n\geq 0$ $sE_{2n+1}^m(z,k^2)=sn(z,k)\sum_{r=0}^{r=n}B_{2r+1}sn^{2r}(z,k)$ *Normalisation* $B_1=1$	$\begin{cases}\alpha_r=(2r+2)(2r+3)\\ \beta_r=(2r+1)^2(1+k^2)\\ \gamma_r=-(2n-2r+2)(2n+2r+1)k^2\end{cases}$	$sE_{2n+1}^m(z,k^2)\quad m\in\{0,\dots,n\}\quad n\geq 0$ $sE_{2n+1}^m(z,k^2)=\sum_{p=0}^{p=n}A_{2p+1}Cos((2p+1)\varphi)$	$\begin{cases}\alpha_p=\frac{1}{2}(2n-2p-1)(2n+2p+4)k^2\\ \beta_p=\begin{cases}2-k^2+\frac{1}{2}(2n+1)(2n+2)k^2 \quad pour \quad p=0\\ (2p+1)^2(2-k^2) \quad pour \quad p\geq 1\end{cases}\\ \gamma_p=\frac{1}{2}(2n-2p+2)(2n+2p+1)k^2\end{cases}$ *Formule (20) avec v=2n+1*	$\sum_{p=0}^{p=n}A_{2p+1}{}^2=1$ $\sum_{p=0}^{p=n}A_{2p+1}>0$ *ou* $A_1=1$
3	3	$cE_{2n+1}^m(z,k^2)\quad m\in\{0,\dots,n\}\quad n\geq 0$ $cE_{2n+1}^m(z,k^2)=cn(z,k)\sum_{r=0}^{r=n}A_{2r}sn^{2r}(z,k)$ *Normalisation* $A_0=1$	$\begin{cases}\alpha_r=(2r+1)(2r+2)\\ \beta_r=(2r+1)^2+4r^2k^2\\ \gamma_r=-(2n-2r+2)(2n+2r+1)k^2\end{cases}$	$cE_{2n+1}^m(z,k^2)\quad m\in\{0,\dots,n\}\quad n\geq 0$ $Es_\nu^{2n+1}(z,k^2)=\sum_{p=0}^{p=n}B_{2p+1}Sin((2p+1)\varphi)$	$\begin{cases}\alpha_p=\frac{1}{2}(2n-2p-1)(2n+2p+4)k^2\\ \beta_p=\begin{cases}2-k^2-\frac{1}{2}(2n+1)(2n+2)k^2 \quad pour \quad p=0\\ (2p+1)^2(2-k^2) \quad pour \quad p\geq 1\end{cases}\\ \gamma_p=\frac{1}{2}(2n-2p+2)(2n+2p+1)k^2\end{cases}$ *Formule (24) avec v=2n+1*	$\sum_{p=0}^{p=n}B_{2p+1}{}^2=1$ $\sum_{p=0}^{p=n}(2p+1)B_{2p+1}>0$ *ou* $B_1=1$
4	4	$dE_{2n+1}^m(z,k^2)\quad m\in\{0,\dots,n\}\quad n\geq 0$ $dE_{2n+1}^m(z,k^2)=dn(z,k)\sum_{r=0}^{r=n}C_{2r}sn^{2r}(z,k)$ *Normalisation* $C_0=1$	$\begin{cases}\alpha_r=(2r+1)(2r+2)\\ \beta_r=4r^2+(2r+1)^2k^2\\ \gamma_r=-(2n-2r+2)(2n+2r+1)k^2\end{cases}$	$dE_{2n+1}^m(z,k^2)\quad m\in\{0,\dots,n\}\quad n\geq 0$ $dE_{2n+1}^m(z,k^2)=dn(z,k)\left\{\frac{C_0}{2}+\sum_{p=1}^{p=n}C_{2p}Cos(2p\varphi)\right\}$	$\begin{cases}\alpha_p=\begin{cases}(2n+1)(2n+2)k^2 \quad pour \quad p=0\\ \frac{1}{2}(2n-2p+1)(2n+2p+2)k^2 \quad pour \quad p\geq 1\end{cases}\\ \beta_p=4p^2(2-k^2)\\ \gamma_p=\frac{1}{2}(2n-2p+2)(2n+2p+1)k^2\end{cases}$ *Formule (19) avec v=2n+1*	$\left(1-\frac{k^2}{2}\right)\left\{\frac{C_0{}^2}{2}+\sum_{p=1}^{p=n}C_{2p}{}^2\right\}-\frac{k^2}{2}\sum_{p=0}^{p=n}C_{2p}C_{2p+2}=1$ $\frac{C_0}{2}+\sum_{p=1}^{p=n}C_{2p}>0$ *ou* $C_0=1$
5	7	$cdE_{2n}^m(z,k^2)\quad m\in\{0,\dots,n-1\}\quad n>0$ $cdE_{2n}^m(z,k^2)=cn(z,k)dn(z,k)\sum_{r=0}^{r=n-1}C_{2r}sn^{2r}(z,k)$ *Normalisation* $C_0=1$	$\begin{cases}\alpha_r=(2r+1)(2r+2)\\ \beta_r=(2r+1)^2(1+k^2)\\ \gamma_r=-(2n-2r)(2n+2r+1)k^2\end{cases}$	$cdE_{2n}^m(z,k^2)\quad m\in\{0,\dots,n-1\}\quad n>0$ $cdE_{2n}^m(z,k^2)=dn(z,k)\sum_{p=0}^{p=n-1}D_{2p+1}Sin((2p+1)\varphi)$	$\begin{cases}\alpha_p=\frac{1}{2}(2n-2p-1)(2n+2p+2)k^2\\ \beta_p=\begin{cases}2-k^2-\frac{1}{2}2n(2n+1)k^2 \quad pour \quad p=0\\ (2p+1)^2(2-k^2) \quad pour \quad p\geq 1\end{cases}\\ \gamma_p=\frac{1}{2}(2n-2p)(2n+2p+1)k^2\end{cases}$ *Formule (25) avec v=2n*	$\left(1-\frac{k^2}{2}\right)\left\{\sum_{p=0}^{p=n-1}D_{2p+1}{}^2\right\}+\frac{k^2}{2}\left\{\frac{D_1{}^2}{2}-\sum_{p=0}^{p=n-1}D_{2p+1}D_{2p+3}\right\}=1$ $\sum_{p=0}^{p=n-1}(2p+1)D_{2p+1}>0$ *ou* $D_1=1$
6	5	$scE_{2n}^m(z,k^2)\quad m\in\{0,\dots,n-1\}\quad n>0$ $scE_{2n}^m(z,k^2)=sn(z,k)cn(z,k)\sum_{r=0}^{r=n-1}B_{2r+1}sn^{2r}(z,k)$ *Normalisation* $B_1=1$	$\begin{cases}\alpha_r=(2r+2)(2r+3)\\ \beta_r=(2r+2)^2+(2r+1)^2k^2\\ \gamma_r=-(2n-2r)(2n+2r+1)k^2\end{cases}$	$scE_{2n}^m(z,k^2)\quad m\in\{0,\dots,n-1\}\quad n>0$ $scE_{2n}^m(z,k^2)=\sum_{p=0}^{p=n-1}B_{2p+2}Sin((2p+2)\varphi)$	$\begin{cases}\alpha_p=\frac{1}{2}(2n-2p-3)(2n+2p+4)k^2\\ \beta_p=(2p+2)^2(2-k^2)\\ \gamma_p=\frac{1}{2}(2n-2p)(2n+2p+1)k^2\end{cases}$ *Formule (22) avec v=2n*	$\sum_{p=0}^{p=n-1}B_{2p+2}{}^2=1$ $\sum_{p=0}^{p=n-1}(2p+1)B_{2p+2}>0$ *ou* $B_2=1$
7	6	$sdE_{2n}^m(z,k^2)\quad m\in\{0,\dots,n-1\}\quad n>0$ $sdE_{2n}^m(z,k^2)=dn(z,k)sn(z,k)\sum_{r=0}^{r=n-1}D_{2r+1}sn^{2r}(z,k)$ *Normalisation* $D_1=1$	$\begin{cases}\alpha_r=(2r+2)(2r+3)\\ \beta_r=(2r+1)^2+(2r+2)^2k^2\\ \gamma_r=-(2n-2r)(2n+2r+1)k^2\end{cases}$	$sdE_{2n}^m(z,k^2)\quad m\in\{0,\dots,n-1\}\quad n>0$ $sdE_{2n}^m(z,k^2)=dn(z,k)\sum_{p=0}^{p=n-1}C_{2p+1}Cos((2p+1)\varphi)$	$\begin{cases}\alpha_p=\frac{1}{2}(2n-2p-1)(2n+2p+2)k^2\\ \beta_p=\begin{cases}2-k^2+\frac{1}{2}2n(2n+1)k^2 \quad pour \quad p=0\\ (2p+1)^2(2-k^2) \quad pour \quad p\geq 1\end{cases}\\ \gamma_p=\frac{1}{2}(2n-2p)(2n+2p+1)k^2\end{cases}$ *Formule (21) avec v=2n*	$\left(1-\frac{k^2}{2}\right)\left\{\sum_{p=0}^{p=n-1}C_{2p+1}{}^2\right\}-\frac{k^2}{2}\left\{\frac{C_1{}^2}{2}+\sum_{p=0}^{p=n-1}C_{2p+1}C_{2p+3}\right\}=1$ $\sum_{p=0}^{p=n-1}C_{2p+1}>0$ *ou* $C_1=1$
8	8	$scdE_{2n+1}^m(z,k^2)\quad m\in\{0,\dots,n-1\}\quad n>1$ $scdE_{2n+1}^m(z,k^2)=dn(z,k)sn(z,k)cn(z,k)\sum_{r=0}^{r=n-1}D_{2r+1}sn^{2r}(z,k)$ *Normalisation* $D_1=1$	$\begin{cases}\alpha_r=(2r+2)(2r+3)\\ \beta_r=(2r+2)^2(1+k^2)\\ \gamma_r=-(2n-2r)(2n+2r+3)k^2\end{cases}$	$scdE_{2n+1}^m(z,k^2)\quad m\in\{0,\dots,n-1\}\quad n>1$ $scdE_{2n+1}^m(z,k^2)=dn(z,k)\sum_{p=0}^{p=n-1}D_{2p+2}Sin((2p+2)\varphi)$	$\begin{cases}\alpha_p=\frac{1}{2}(2n-2p-1)(2n+2p+4)k^2\\ \beta_p=(2p+2)^2(2-k^2)\\ \gamma_p=\frac{1}{2}(2n-2p)(2n+2p+3)k^2\end{cases}$ *Formule (23) avec v=2n+1*	$\left(1-\frac{k^2}{2}\right)\left\{\sum_{p=0}^{p=n-1}D_{2p+2}{}^2\right\}-\frac{k^2}{2}\left\{\sum_{p=0}^{p=n-1}D_{2p+2}D_{2p+4}\right\}=1$ $\sum_{p=0}^{p=n-1}(2p+2)D_{2p+2}>0$ *ou* $D_2=1$

Polynômes de Lamé, cas d'un développement fini à l'aide des polynômes de Tchebychev de première et deuxième espèce

Les polynômes de Tchebychev de première espèce sont définis comme suit :

$$Cos(p\varphi)=T_p(Cos(\varphi)) \Rightarrow Cos(p\varphi)=T_p(sn(z,k))$$

et ceux de deuxième espèce comme suit :

$$\frac{Sin((p+1)\varphi)}{Sin(\varphi)}=U_p(Cos(\varphi)) \Rightarrow Sin((p+1)\varphi)=Sin(\varphi)U_p(Cos(\varphi))=cn(z,k)U_p(sn(z,k))$$

Voici un tableau exprimant les huit types de développements possibles des polynômes de Lamé à l'aide des polynômes de Tchebychev de première et deuxième espèce :

Type de polynôme de Lamé (Arscott)	*Type de polynôme de Lamé (NIST)*	*Notation et développement de NIST par les polynômes de Tchebychev de première et deuxième espèce*
1	*1*	$uE_{2n}^m(z,k^2)\quad m\in\{0,...,n\}\quad n\geq 0\qquad uE_{2n}^m(z,k^2)=\frac{A_0}{2}+\sum_{p=1}^{p=n}A_{2p}T_{2p}(sn(z,k))$
2	*2*	$sE_{2n+1}^m(z,k^2)\quad m\in\{0,...,n\}\quad n\geq 0\qquad sE_{2n+1}^m(z,k^2)=\sum_{p=0}^{p=n}A_{2p+1}T_{2p+1}(sn(z,k))$
3	*3*	$cE_{2n+1}^m(z,k^2)\quad m\in\{0,...,n\}\quad n\geq 0\qquad Es_\nu^{2m+1}(z,k^2)=cn(z,k)\sum_{p=0}^{p=n}B_{2p+1}U_{2p}(sn(z,k))$
4	*4*	$dE_{2n+1}^m(z,k^2)\quad m\in\{0,...,n\}\quad n\geq 0\qquad dE_{2n+1}^m(z,k^2)=dn(z,k)\left\{\frac{C_0}{2}+\sum_{p=1}^{p=n}C_{2p}T_{2p}(sn(z,k))\right\}$
5	*7*	$cdE_{2n}^m(z,k^2)\quad m\in\{0,...,n-1\}\quad n>0\qquad cdE_{2n}^m(z,k^2)=cn(z,k)dn(z,k)\sum_{p=0}^{p=n-1}D_{2p+1}U_{2p}(sn(z,k))$
6	*5*	$scE_{2n}^m(z,k^2)\quad m\in\{0,...,n-1\}\quad n>0\qquad scE_{2n}^m(z,k^2)=cn(z,k)\sum_{p=0}^{p=n-1}B_{2p+2}U_{2p+1}(sn(z,k))$
7	*6*	$sdE_{2n}^m(z,k^2)\quad m\in\{0,...,n-1\}\quad n>0\qquad sdE_{2n}^m(z,k^2)=dn(z,k)\sum_{p=0}^{p=n-1}C_{2p+1}T_{2p+1}(sn(z,k))$
8	*8*	$scdE_{2n+1}^m(z,k^2)\quad m\in\{0,...,n-1\}\quad n>1\qquad scdE_{2n+1}^m(z,k^2)=cn(z,k)dn(z,k)\sum_{p=0}^{p=n-1}D_{2p+2}U_{2p+1}(sn(z,k))$

Equations intégrales des solutions périodiques 2K et 4K de l'équation de Lamé

Les fonctions périodiques 2K et 4K vérifient des équations intégrales de Fredholn homogène dont le noyau se construit à l'aide des fonctions de Legendre de première espèce. Délibérément je ne vais pas prendre les noyaux qui sont présentés dans « NIST Handbook of Mathematical Functions, chapitre 29, Lamé-Functions », mais ceux évoqués dans l'article de 1940 de E.L.Ince, « V. The Periodic Lamé Functions » qui me paraissent plus commodes à manipuler.

Fonctions de Lamé périodiques 2K : $Ec_\nu^{2m}(z)$ pour $\nu \neq 2n+1$

L'équation intégrale s'écrit : $Ec_\nu^{2m}(z,k^2) = \lambda_{c,\nu}^{2m}(k^2) \int_{-2K(k^2)}^{2K(k^2)} du\, P_\nu(k\, sn(z,k) sn(u,k)) Ec_\nu^{2m}(u,k^2) \quad \forall \nu \neq 2n+1$

La constante se détermine de la manière suivante en se fixant à la valeur 0 de l'argument pour $\nu \neq 2n+1$, ce qui donne :

$$\forall \nu \neq 2n+1 \quad \lambda_{c,\nu}^{2m}(k^2) = \frac{Ec_\nu^{2m}(0,k^2)}{P_\nu(0) \int_{-2K(k^2)}^{2K(k^2)} du E_\nu^{2m}(u,k^2)} \qquad Comme \quad Ec_\nu^{2m}(z,k^2) = dn(z,k)\left\{\frac{C_0}{2} + \sum_{p=1}^{p=\infty} C_{2p} Cos(2p\varphi)\right\} \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - am(z,k)$$

$$\Rightarrow \lambda_{c,\nu}^{2m}(k^2) = \frac{Ec_\nu^{2m}(0,k^2)}{P_\nu(0) \int_{-2K(k^2)}^{2K(k^2)} du\, dn(u,k)\left\{\frac{C_0}{2} + \sum_{p=1}^{p=\infty} C_{2p} Cos(2p\varphi)\right\}} = \frac{Ec_\nu^{2m}(0,k^2)}{P_\nu(0) \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \left\{\frac{C_0}{2} + \sum_{p=1}^{p=\infty} C_{2p} Cos(2p\varphi)\right\}} = \frac{Ec_\nu^{2m}(0,k^2)}{\pi C_0 P_\nu(0)}$$

D'où l'équation intégrale :

$$\begin{cases} Ec_\nu^{2m}(z,k^2) = dn(z,k)\left\{\frac{C_0}{2} + \sum_{p=1}^{p=\infty} C_{2p} Cos(2p\varphi)\right\} \quad pour \quad \nu \neq 2n+1 \\ Ec_\nu^{2m}(z,k^2) = \frac{Ec_\nu^{2m}(0,k^2)}{\pi C_0 P_\nu(0)} \int_{-2K}^{2K} du P_\nu(k\, sn(z,k) sn(u,k)) Ec_\nu^{2m}(u,k^2) \end{cases}$$

L'équation intégrale peut aussi s'écrire de manière équivalente en utilisant les propriétés de périodicité et d'anti-périodicité des fonctions de l'expression :

$$Ec_\nu^{2m}(z,k^2) = \frac{Ec_\nu^{2m}(0,k^2)}{\pi C_0 P_\nu(0)} \int_{-2K}^{2K} du P_\nu(k\, sn(z,k) sn(u,k)) Ec_\nu^{2m}(u,k^2) \leftarrow v = u + 2K \quad sn(v-2K,k) = -sn(v,k)$$

$$Comme \quad Ec_\nu^{2m}(z,k^2) = Ec_\nu^{2m}(-z,k^2) \quad et \quad Ec_\nu^{2m}(v-2K,k^2) = Ec_\nu^{2m}(v,k^2)$$

$$\Rightarrow Ec_\nu^{2m}(-z,k^2) = Ec_\nu^{2m}(z,k^2) = \frac{Ec_\nu^{2m}(0,k^2)}{\pi C_0 P_\nu(0)} \int_0^{4K} dv P_\nu(k\, sn(z,k) sn(v,k)) Ec_\nu^{2m}(v,k^2) \quad pour \quad \nu \neq 2n+1$$

On peut établir également que :

$$\begin{cases} Ec_\nu^{2m}(z,k^2) = dn(z,k)\left\{\frac{C_0}{2} + \sum_{p=1}^{p=\infty} C_{2p} Cos(2p\varphi)\right\} \quad pour \quad \nu \neq 2n+1 \\ Ec_\nu^{2m}(z,k^2) = \frac{2Ec_\nu^{2m}(0,k^2)}{\pi C_0 P_\nu(0)} \int_{-K}^{K} du P_\nu(k\, sn(z,k) sn(u,k)) Ec_\nu^{2m}(u,k^2) \end{cases}$$

Fonctions de Lamé périodiques 4K : $Ec_\nu^{2m+1}(z)$ pour $\nu \neq 2n$

L'équation intégrale s'écrit à l'aide du même noyau :

$$Ec_{c,\nu}^{2m+1}(z,k^2) = \lambda_\nu^{2m+1}(k^2) \int_{-2K(k^2)}^{2K(k^2)} du\, P_\nu(k\, sn(z,k) sn(u,k)) Ec_\nu^{2m+1}(u,k^2) \qquad \forall \nu \neq 2n$$

La constante se détermine de la manière suivante par dérivation de la fonction et en se fixant à la valeur 0 de l'argument pour $\nu \neq 2n$, ce qui donne :

$$Ec_\nu^{2m+1}{}'(0,k^2) = \lambda_{c,\nu}^{2m+1}(k^2)\, k\, P_\nu{}'(0) \int_{-2K(k^2)}^{2K(k^2)} du\, sn(u,k) Ec_\nu^{2m+1}(u,k^2) \quad Comme\ P_\nu{}'(0) = -(\nu+1) P_{\nu+1}(0)$$

$$\forall \nu \neq n \quad \lambda_{c,\nu}^{2m+1}(k^2) = -\frac{Ec_\nu^{2m+1}{}'(0,k^2)}{k(\nu+1) P_{\nu+1}(0) \int_{-2K(k^2)}^{2K(k^2)} du\, sn(u,k) Ec_\nu^{2m+1}(u,k^2)} \qquad Comme \quad Ec_\nu^{2m+1}(z,k^2) = dn(z,k) \left\{ \sum_{p=0}^{p=\infty} C_{2p+1} Cos((2p+1)\varphi) \right\} \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - am(z,k)$$

$$\Rightarrow sn(u,k) = Cos(\varphi) \quad et \quad \lambda_{c,\nu}^{2m+1}(k^2) = -\frac{Ec_\nu^{2m+1}{}'(0,k^2)}{k(\nu+1) P_{\nu+1}(0) \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi\, Cos(\varphi) \left\{ \sum_{p=0}^{p=\infty} C_{2p+1} Cos((2p+1)\varphi) \right\}} = -\frac{Ec_\nu^{2m+1}{}'(0,k^2)}{k(\nu+1)\pi\, C_1 P_{\nu+1}(0)}$$

Ce qui permet d'obtenir les trois équations intégrales équivalentes:

$$Ec_\nu^{2m+1}(z,k^2) = dn(z,k) \left\{ \sum_{p=0}^{p=\infty} C_{2p+1} Cos((2p+1)\varphi) \right\} \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - am(z,k)$$

$$\begin{cases} Ec_\nu^{2m+1}(z,k^2) = -\dfrac{Ec_\nu^{2m+1}{}'(0,k^2)}{k(\nu+1)\pi\, C_1 P_{\nu+1}(0)} \displaystyle\int_{-2K(k^2)}^{2K(k^2)} du\, P_\nu(k\, sn(z,k) sn(u,k)) Ec_\nu^{2m+1}(u,k^2) \\ Ec_\nu^{2m+1}(z,k^2) = -\dfrac{Ec_\nu^{2m+1}{}'(0,k^2)}{k(\nu+1)\pi\, C_1 P_{\nu+1}(0)} \displaystyle\int_{0}^{4K(k^2)} du\, P_\nu(k\, sn(z,k) sn(u,k)) Ec_\nu^{2m+1}(u,k^2) \qquad \forall \nu \neq 2n \\ Ec_\nu^{2m+1}(z,k^2) = -2\dfrac{Ec_\nu^{2m+1}{}'(0,k^2)}{k(\nu+1)\pi\, C_1 P_{\nu+1}(0)} \displaystyle\int_{-K(k^2)}^{K(k^2)} du\, P_\nu(k\, sn(z,k) sn(u,k)) Ec_\nu^{2m+1}(u,k^2) \end{cases}$$

Fonctions de Lamé périodiques 4K : $Es_{\nu}^{2n+1}(z)$ pour $\nu \neq 2n$

L'équation intégrale s'écrit à l'aide du noyau suivant :

$$Es_{\nu}^{2m+1}(z,k^2) = \lambda_{s,\nu}^{2m+1}(k^2)\, cn(z,k) \int_{-2K(k^2)}^{2K(k^2)} du\, cn(u,k) P_{\nu}'(k\, sn(z,k) sn(u,k)) Es_{\nu}^{2m+1}(u,k^2)$$

Et la constante multiplicative se détermine de la même manière :

$$\lambda_{s,\nu}^{2m+1}(k^2) = \frac{Es_{\nu}^{2m+1}(0,k^2)}{P_{\nu}'(0) \int_{-2K(k^2)}^{2K(k^2)} du\, cn(u,k) Es_{\nu}^{2m+1}(u,k^2)} \quad \text{Comme} \quad Es_{\nu}^{2m+1}(z,k^2) = dn(z,k) \left\{ \sum_{p=0}^{p=\infty} D_{2p+1} Sin((2p+1)\varphi) \right\} \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - am(z,k) \quad \text{et} \quad cn(z,k) = Sin(\varphi)$$

$$\Rightarrow \lambda_{s,\nu}^{2m+1}(k^2) = \frac{Es_{\nu}^{2m+1}(0,k^2)}{P_{\nu}'(0) \int_{-2K(k^2)}^{2K(k^2)} du\, cn(u,k) \left\{ \sum_{p=0}^{p=\infty} D_{2p+1} Sin((2p+1)\varphi) \right\}} = \frac{Es_{\nu}^{2m+1}(0,k^2)}{P_{\nu}'(0) \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi\, Sin(\varphi) \left\{ \sum_{p=0}^{p=\infty} D_{2p+1} Sin((2p+1)\varphi) \right\}} = \frac{Es_{\nu}^{2m+1}(0,k^2)}{\pi D_1 P_{\nu}'(0)} = -\frac{Es_{\nu}^{2m+1}(0,k^2)}{\pi(\nu+1) D_1 P_{\nu+1}(0)}$$

Ce qui permet d'obtenir les trois équations intégrales équivalentes :

$$Es_{\nu}^{2m+1}(z,k^2) = dn(z,k) \left\{ \sum_{p=0}^{p=\infty} D_{2p+1} Sin((2p+1)\varphi) \right\}$$

$$\begin{cases} Es_{\nu}^{2m+1}(z,k^2) = -\dfrac{Es_{\nu}^{2m+1}(0,k^2)}{\pi(\nu+1) D_1 P_{\nu+1}(0)} cn(z,k) \displaystyle\int_{-2K(k^2)}^{2K(k^2)} du\, cn(u,k) P_{\nu}'(k\, sn(z,k) sn(u,k)) Es_{\nu}^{2m+1}(u,k^2) \\ Es_{\nu}^{2m+1}(z,k^2) = -\dfrac{Es_{\nu}^{2m+1}(0,k^2)}{\pi(\nu+1) D_1 P_{\nu+1}(0)} cn(z,k) \displaystyle\int_{0}^{4K(k^2)} du\, cn(u,k) P_{\nu}'(k\, sn(z,k) sn(u,k)) Es_{\nu}^{2m+1}(u,k^2) \\ Es_{\nu}^{2m+1}(z,k^2) = -\dfrac{2Es_{\nu}^{2m+1}(0,k^2)}{\pi(\nu+1) D_1 P_{\nu+1}(0)} cn(z,k) \displaystyle\int_{-K(k^2)}^{K(k^2)} du\, cn(u,k) P_{\nu}'(k\, sn(z,k) sn(u,k)) Es_{\nu}^{2m+1}(u,k^2) \end{cases}$$

Fonctions de Lamé périodiques 2K : $Es_\nu^{2n+2}(z)$ pour $\nu \neq 2n+1$

L'équation intégrale s'écrit à l'aide du noyau suivant :

$$Es_\nu^{2m+2}(z,k^2) = \lambda_{s,\nu}^{2m+2}(k^2)\,cn(z,k)\int_{-2K(k^2)}^{2K(k^2)} du\; cn(u,k)P_\nu'(k\,sn(z,k)sn(u,k))Es_\nu^{2m+2}(u,k^2)$$

Et la constante multiplicative se détermine de la même manière par dérivation et fixation à l'argument 0 :

$$Es_\nu^{2m+2}{}'(0,k^2) = \lambda_{s,\nu}^{2m+2}(k^2)kP_\nu''(0)\int_{-2K(k^2)}^{2K(k^2)} du\; cn(u,k)sn(u,k)Es_\nu^{2m+2}(u,k^2)$$

$$\lambda_{s,\nu}^{2m+2}(k^2) = \frac{Es_\nu^{2m+2}{}'(0,k^2)}{kP_\nu''(0)\int_{-2K(k^2)}^{2K(k^2)} du\; cn(u,k)sn(u,k)Es_\nu^{2m+2}(u,k^2)} \quad \text{Comme} \quad Es_\nu^{2m+2}(z,k^2) = dn(z,k)\left\{\sum_{p=0}^{p=\infty} D_{2p+2}Sin((2p+2)\varphi)\right\} \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - am(z,k) \quad \text{et} \quad cn(z,k) = Sin(\varphi)$$

$$\Rightarrow \lambda_{s,\nu}^{2m+2}(k^2) = \frac{Es_\nu^{2m+2}{}'(0,k^2)}{kP_\nu''(0)\int_{-2K(k^2)}^{2K(k^2)} du\; cn(u,k)sn(u,k)dn(u,k)\left\{\sum_{p=0}^{p=\infty} D_{2p+2}Sin((2p+2)\varphi)\right\}} = \frac{2Es_\nu^{2m+2}{}'(0,k^2)}{kP_\nu''(0)2\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi\; Cos(\varphi)Sin(\varphi)\left\{\sum_{p=0}^{p=\infty} D_{2p+2}Sin((2p+2)\varphi)\right\}}$$

$$\Rightarrow \lambda_{s,\nu}^{2m+2}(k^2) = \frac{2Es_\nu^{2m+2}{}'(0,k^2)}{kP_\nu''(0)\pi D_2} = \frac{2Es_\nu^{2m+2}{}'(0,k^2)}{\pi D_2 k\, P_\nu''(0)} \quad \text{comme} \quad P_\nu''(0) = -\nu(\nu+1)P_\nu(0) \Rightarrow \lambda_{s,\nu}^{2m+2}(k^2) = -\frac{2Es_\nu^{2m+2}{}'(0,k^2)}{\pi D_2 k\nu(\nu+1)P_\nu(0)}$$

Ce qui permet d'obtenir les trois équations intégrales équivalentes :

$$Es_\nu^{2m+2}(z,k^2) = dn(z,k)\left\{\sum_{p=0}^{p=\infty} D_{2p+2}Sin((2p+2)\varphi)\right\}$$

$$\begin{cases} Es_\nu^{2m+2}(z,k^2) = -\dfrac{2Es_\nu^{2m+2}{}'(0,k^2)}{\pi D_2 k\nu(\nu+1)P_\nu(0)}cn(z,k)\displaystyle\int_{-2K(k^2)}^{2K(k^2)} du\; cn(u,k)P_\nu'(k\,sn(z,k)sn(u,k))Es_\nu^{2m+2}(u,k^2) \\ Es_\nu^{2m+2}(z,k^2) = -\dfrac{2Es_\nu^{2m+2}{}'(0,k^2)}{\pi D_2 k\nu(\nu+1)P_\nu(0)}cn(z,k)\displaystyle\int_{0}^{4K(k^2)} du\; cn(u,k)P_\nu'(k\,sn(z,k)sn(u,k))Es_\nu^{2m+2}(u,k^2) \\ Es_\nu^{2m+2}(z,k^2) = -\dfrac{4Es_\nu^{2m+2}{}'(0,k^2)}{\pi D_2 k\nu(\nu+1)P_\nu(0)}cn(z,k)\displaystyle\int_{-K(k^2)}^{K(k^2)} du\; cn(u,k)P_\nu'(k\,sn(z,k)sn(u,k))Es_\nu^{2m+2}(u,k^2) \end{cases}$$

<u>Développement des solutions périodiques 2K et 4K de l'équation de Lamé par des fonctions associées de Legendre de première espèce et contructions des solutions de l'équation de Lamé de deuxième espèce par des fonctions associées de Legendre de deuxième espèce</u>

Les fonctions périodiques 2K et 4K peuvent se développer à l'aide d'une série de fonctions associées de Legendre de première espèce à partir des équations intégrales présenté précédemment.

Avant de poursuivre ces calculs, j'introduis une formule bien pratique du théorème d'addition sur les fonctions associées de Legendre, donnée dans l'ouvrage de E.T.Whittaker et G.N.Watson « A course of Modern Analysis » paragraphe 15.71, et rappelée dans l'article de 1948, Erdelyi, « XXVII —Expansions of Lamé Functions into Series of Legendre Functions » (les deux formules diffèrent légèrement mais sont équivalentes, et encore faut-il les modifier pour se placer dans le cas des fonctions de Ferrer, autrement appelées « On the cut » soit lorsque l'argument est dans l'intervalle [-1,1]).

$$P_\nu\left(zt+\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-t^2}Cos(\omega)\right)=\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\frac{\Gamma(\nu-m+1)}{\Gamma(\nu+m+1)}P_\nu^m(z)P_\nu^m(t)Cos(m\omega) \qquad z,t\in[-1,1]$$

Étant donnée l'orthogonalité des fonctions sinusoïdales et le fait que les termes n et -n dans la sommation contribuent de façon égale à l'intégrale, il vient :

$$\int_0^{2\pi}d\omega\, Cos(n\omega)P_\nu\left(zt+\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-t^2}Cos(\omega)\right)=\int_{-\pi}^{\pi}d\omega\, Cos(n\omega)P_\nu\left(zt+\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-t^2}Cos(\omega)\right)=2\pi\frac{\Gamma(\nu-n+1)}{\Gamma(\nu+n+1)}P_\nu^n(z)P_\nu^n(t)$$

Soit sur la valeur t=0 :

$$\int_0^{2\pi}d\omega\, Cos(n\omega)P_\nu\left(\sqrt{1-z^2}Cos(\omega)\right)=\int_{-\pi}^{\pi}d\omega\, Cos(n\omega)P_\nu\left(\sqrt{1-z^2}Cos(\omega)\right)=2\pi\frac{\Gamma(\nu-n+1)}{\Gamma(\nu+n+1)}P_\nu^n(0)P_\nu^n(z)$$

En dérivant la formule de sommation par rapport à ω, il vient :

$$Sin(\omega)\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-t^2}P_\nu'\left(zt+\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-t^2}Cos(\omega)\right)=\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}m\frac{\Gamma(\nu-m+1)}{\Gamma(\nu+m+1)}P_\nu^m(z)P_\nu^m(t)Sin(m\omega)$$

Soit l'intégrale définie suivante, puisque là encore les termes n et -n contribuent de façon égale :

$$\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-t^2}\int_0^{2\pi}d\omega\, Sin(\omega)Sin(n\omega)P_\nu'\left(zt+\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-t^2}Cos(\omega)\right)=\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-t^2}\int_{-\pi}^{\pi}d\omega\, Sin(\omega)Sin(n\omega)P_\nu'\left(zt+\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-t^2}Cos(\omega)\right)=2n\pi\frac{\Gamma(\nu-n+1)}{\Gamma(\nu+n+1)}P_\nu^n(z)P_\nu^n(t)$$

Soit sur la valeur t=0 :

$$\sqrt{1-z^2}\int_0^{2\pi}d\omega\, Sin(\omega)Sin(n\omega)P_\nu'\left(\sqrt{1-z^2}Cos(\omega)\right)=\sqrt{1-z^2}\int_{-\pi}^{\pi}d\omega\, Sin(\omega)Sin(n\omega)P_\nu'\left(\sqrt{1-z^2}Cos(\omega)\right)=2n\pi\frac{\Gamma(\nu-n+1)}{\Gamma(\nu+n+1)}P_\nu^n(0)P_\nu^n(z)$$

Revenons à la construction du développement des fonctions de Lamé en fonctions associées de Legendre.

Fonctions de Lamé périodiques 2K : $Ec_\nu^{2m}(z)$ pour $\nu \neq 2n+1$

En injectant le développement en série trigonométrique dans l'équation intégrale, et reconnaissant l'intégrale définie issue de la formule de sommation, il vient :

$$Ec_\nu^{2m}(u,k^2) = dn(z,k)\left\{\frac{C_0}{2} + \sum_{p=1}^{p=\infty} C_{2p} Cos(2p\varphi)\right\} \quad et \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - am(u,k) \quad pour \quad \nu \neq 2n+1$$

$$sn(u,k) = Cos(\varphi) \quad k\, sn(z,k) = \sqrt{1-dn^2(z,k)} \quad Posons \quad w = dn(z,k)$$

$$\Rightarrow Ec_\nu^{2m}(z,k^2) = \frac{Ec_\nu^{2m}(0,k^2)}{\pi C_0 P_\nu(0)} \int_{-2K}^{2K} du P_\nu(k\, sn(z,k) sn(u,k)) dn(u,k) \left\{\frac{C_0}{2} + \sum_{p=1}^{p=\infty} C_{2p} Cos(2p\varphi)\right\}$$

$$\Rightarrow Ec_\nu^{2m}(z,k^2) = \frac{Ec_\nu^{2m}(0,k^2)}{\pi C_0 P_\nu(0)} \left\{\frac{C_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi\, P_\nu\left(\sqrt{1-w^2}Cos(\varphi)\right) + \sum_{p=1}^{p=\infty} C_{2p} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi\, P_\nu\left(\sqrt{1-w^2}Cos(\varphi)\right) Cos(2p\varphi)\right\}$$

$$Comme \quad \begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi\, P_\nu\left(\sqrt{1-w^2}Cos(\varphi)\right) Cos(2p\varphi) = 2\pi \frac{\Gamma(\nu-2p+1)}{\Gamma(\nu+2p+1)} P_\nu^{2p}(0) P_\nu^{2p}(w) \\ \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi\, P_\nu\left(\sqrt{1-w^2}Cos(\varphi)\right) = 2\pi\, P_\nu(0) P_\nu(w) \end{cases}$$

$$\Rightarrow Ec_\nu^{2m}(z,k^2) = 2\frac{Ec_\nu^{2m}(0,k^2)}{C_0 P_\nu(0)} \left\{\frac{C_0}{2} P_\nu(0) P_\nu(dn(z,k)) + \sum_{p=1}^{p=\infty} C_{2p} \frac{\Gamma(\nu-2p+1)}{\Gamma(\nu+2p+1)} P_\nu^{2p}(0) P_\nu^{2p}(dn(z,k))\right\}$$

Soit donc le développement suivant :

$$\begin{cases} Ec_\nu^{2m}(z,k^2) = dn(z,k)\left\{\frac{C_0}{2} + \sum_{p=1}^{p=\infty} C_{2p} Cos(2p\varphi)\right\} \quad et \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - am(z,k) \quad pour \quad \nu \neq 2n+1 \\ Ec_\nu^{2m}(0,k^2) = \frac{C_0}{2} + \sum_{p=1}^{p=\infty} (-1)^p C_{2p} \\ Ec_\nu^{2m}(z,k^2) = 2\frac{Ec_\nu^{2m}(0,k^2)}{C_0 P_\nu(0)} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{C_{2p}}{1+\delta_{p,0}} \frac{\Gamma(\nu-2p+1)}{\Gamma(\nu+2p+1)} P_\nu^{2p}(0) P_\nu^{2p}(dn(z,k)) \qquad \delta_{p,0} = 1 \quad p = 0 \qquad \delta_{p,0} = 0 \quad p \neq 0 \quad \nu \neq 2n \quad et \quad \nu \neq 2n+1 \\ Ec_{2n}^{2m}(z,k^2) = 2\frac{Ec_{2n}^{2m}(0,k^2)}{C_0 P_{2n}(0)} \sum_{p=0}^{p=n} \frac{C_{2p}}{1+\delta_{p,0}} \frac{\Gamma(2n-2p+1)}{\Gamma(2n+2p+1)} P_{2n}^{2p}(0) P_{2n}^{2p}(dn(z,k)) \end{cases}$$

Fonctions de Lamé périodiques 4K : $Ec_\nu^{2m+1}(z)$ pour $\nu \neq 2n$

En injectant le développement en série trigonométrique dans l'équation intégrale, et reconnaissant l'intégrale définie issue de la formule de sommation, il vient :

$$Ec_\nu^{2m+1}(z,k^2) = dn(z,k)\left\{\sum_{p=0}^{p=\infty} C_{2p+1} Cos((2p+1)\varphi)\right\} \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - am(z,k)$$

$$Ec_\nu^{2m+1}(z,k^2) = -\frac{Ec_\nu^{2m+1}{}'(0,k^2)}{k(\nu+1)\pi\ C_1 P_{\nu+1}(0)} \int_{-2K(k^2)}^{2K(k^2)} du\ P_\nu(k\,sn(z,k)sn(u,k)) Ec_\nu^{2m+1}(u,k^2) \qquad \forall \nu \neq 2n$$

$$\Leftrightarrow Ec_\nu^{2m+1}(z,k^2) = -\frac{Ec_\nu^{2m+1}{}'(0,k^2)}{k(\nu+1)\pi\ C_1 P_{\nu+1}(0)} \int_{-2K(k^2)}^{2K(k^2)} du\ dn(u,k) P_\nu(k\,sn(z,k)sn(u,k))\left\{\sum_{p=0}^{p=\infty} C_{2p+1} Cos((2p+1)\varphi)\right\}$$

Posons $w = dn(z,k)$

$$\Leftrightarrow Ec_\nu^{2m+1}(z,k^2) = -\frac{Ec_\nu^{2m+1}{}'(0,k^2)}{k(\nu+1)\pi\ C_1 P_{\nu+1}(0)} \sum_{p=0}^{p=\infty} C_{2p+1} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi\, P_\nu\left(\sqrt{1-w^2}\,Cos(\varphi)\right) Cos((2p+1)\varphi)$$

Comme $$\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi\, P_\nu\left(\sqrt{1-w^2}\,Cos(\varphi)\right) Cos((2p+1)\varphi) = 2\pi \frac{\Gamma(\nu-2p)}{\Gamma(\nu+2p+2)} P_\nu^{2p+1}(0) P_\nu^{2p+1}(w)$$

$$\Leftrightarrow Ec_\nu^{2m+1}(z,k^2) = -2\frac{Ec_\nu^{2m+1}{}'(0,k^2)}{k(\nu+1) C_1 P_{\nu+1}(0)} \sum_{p=0}^{p=\infty} C_{2p+1} \frac{\Gamma(\nu-2p)}{\Gamma(\nu+2p+2)} P_\nu^{2p+1}(0) P_\nu^{2p+1}(dn(z,k))$$

De même $$Ec_\nu^{2m+1}{}'(0,k^2) = -\sum_{p=0}^{p=\infty} (2p+1)(-1)^p C_{2p+1}$$

Soit donc le développement suivant sur [0,2K(k)] :

$$\begin{cases} Ec_\nu^{2m+1}(z,k^2) = dn(z,k)\left\{\sum_{p=0}^{p=\infty} C_{2p+1} Cos((2p+1)\varphi)\right\} \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - am(z,k) \\ Ec_\nu^{2m+1}{}'(0,k^2) = -\sum_{p=0}^{p=\infty} (-1)^p (2p+1) C_{2p+1} \\ Ec_\nu^{2m+1}(z,k^2) = -2\frac{Ec_\nu^{2m+1}{}'(0,k^2)}{k(\nu+1) C_1 P_{\nu+1}(0)} \sum_{p=0}^{p=\infty} C_{2p+1} \frac{\Gamma(\nu-2p)}{\Gamma(\nu+2p+2)} P_\nu^{2p+1}(0) P_\nu^{2p+1}(dn(z,k)) \qquad \forall \nu \neq 2n \quad et \quad \nu \neq 2n+1 \\ Ec_{2n+1}^{2m+1}(z,k^2) = -2\frac{Ec_{2n+1}^{2m+1}{}'(0,k^2)}{k(2n+2) C_1 P_{2n+2}(0)} \sum_{p=0}^{p=n} C_{2p+1} \frac{\Gamma(2n+1-2p)}{\Gamma(2n+3+2p)} P_{2n+1}^{2p+1}(0) P_{2n+1}^{2p+1}(dn(z,k)) \end{cases}$$
Pour $z \in [0, 2K(k^2)]$

Comme ce développement semble périodique 2K par sa dépendance à la fonction elliptique de Jacobi dn(z,k), pour qu'il deviennent périodique 4K et qu'il possède les propriétés de parité et d'anti-périodicité adéquate, je le complète sur les autres intervalles par les formules périodiques et de parité :

$$\begin{cases} Ec_\nu^{2m+1}(z,k^2) = -Ec_\nu^{2m+1}(-z,k^2) \quad pour \quad z < 0 \leftarrow \text{parité négative} \\ Ec_\nu^{2m+1}(z,k^2) = -Ec_\nu^{2m+1}(z-2K(k^2),k^2) \quad pour \quad z \in [2K(k^2), 4K(k^2)] \leftarrow \text{parité négative par rapport à 2K ou anti-périodicité 2K} \\ Ec_\nu^{2m+1}(z,k^2) = Ec_\nu^{2m+1}(Mod(z,4K(k^2)),k^2) \quad pour \quad z > 4K(k^2) \Leftrightarrow Ec_\nu^{2m+1}(z+n\,4K(k^2),k^2) = Ec_\nu^{2m+1}(z,k^2) \quad \forall n \in \mathbf{N} \leftarrow \text{périodicité 4K} \end{cases}$$

Fonctions de Lamé périodiques 4K : $Es_\nu^{2n+1}(z)$ pour $\nu \neq 2n$

En injectant le développement en série trigonométrique dans l'équation intégrale, et reconnaissant l'intégrale définie issue de la formule de sommation, il vient :

$$Es_\nu^{2m+1}(z,k^2) = dn(z,k)\left\{\sum_{p=0}^{p=\infty} D_{2p+1} Sin((2p+1)\varphi)\right\} \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - am(z,k) \quad Posons \quad w = dn(z,k)$$

$$Es_\nu^{2m+1}(z,k^2) = -\frac{Es_\nu^{2m+1}(0,k^2)}{\pi(\nu+1)D_1 P_{\nu+1}(0)} cn(z,k) \int_{-2K(k^2)}^{2K(k^2)} du\, cn(u,k) P_\nu'(k\, sn(z,k) sn(u,k)) Es_\nu^{2m+1}(u,k^2)$$

$$\Leftrightarrow Es_\nu^{2m+1}(z,k^2) = -\frac{Es_\nu^{2m+1}(0,k^2)}{\pi(\nu+1)D_1 P_{\nu+1}(0)} cn(z,k) \sum_{p=0}^{p=\infty} D_{2p+1} \left\{\int_{-2K(k^2)}^{2K(k^2)} du\, dn(u,k) cn(u,k) P_\nu'(k\, sn(z,k) sn(u,k)) Sin((2p+1)\varphi)\right\}$$

$$\Leftrightarrow Es_\nu^{2m+1}(z,k^2) = -\frac{Es_\nu^{2m+1}(0,k^2)}{\pi(\nu+1)D_1 P_{\nu+1}(0)} cn(z,k) \sum_{p=0}^{p=\infty} D_{2p+1} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi\, Sin(\varphi) Sin((2p+1)\varphi) P_\nu'\left(\sqrt{1-w^2}\, Cos(\varphi)\right)$$

$$Comme \quad \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi\, Sin(\varphi) Sin((2p+1)\varphi) P_\nu'\left(\sqrt{1-w^2}\, Cos(\varphi)\right) = \frac{2(2p+1)\pi}{\sqrt{1-w^2}} \frac{\Gamma(\nu-2p)}{\Gamma(\nu+2p+2)} P_\nu^{2p+1}(0) P_\nu^{2p+1}(w)$$

$$\Rightarrow Es_\nu^{2m+1}(z,k^2) = -\frac{2Es_\nu^{2m+1}(0,k^2)}{k(\nu+1)D_1 P_{\nu+1}(0)} \frac{cn(z,k)}{sn(z,k)} \sum_{p=0}^{p=\infty} (2p+1) D_{2p+1} \frac{\Gamma(\nu-2p)}{\Gamma(\nu+2p+2)} P_\nu^{2p+1}(0) P_\nu^{2p+1}(dn(z,k))$$

$$De\ plus \quad Es_\nu^{2m+1}(0,k^2) = \sum_{p=0}^{p=\infty} (-1)^p D_{2p+1}$$

On arrive au développement suivant sur [0,2K(k)] :

$$\begin{cases} Es_\nu^{2m+1}(z,k^2) = dn(z,k)\left\{\sum_{p=0}^{p=\infty} D_{2p+1} Sin((2p+1)\varphi)\right\} \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - am(z,k) \\ Es_\nu^{2m+1}(0,k^2) = \sum_{p=0}^{p=\infty} (-1)^p D_{2p+1} \\ Es_\nu^{2m+1}(z,k^2) = -\frac{2Es_\nu^{2m+1}(0,k^2)}{k(\nu+1)D_1 P_{\nu+1}(0)} \frac{cn(z,k)}{sn(z,k)} \sum_{p=0}^{p=\infty} (2p+1) D_{2p+1} \frac{\Gamma(\nu-2p)}{\Gamma(\nu+2p+2)} P_\nu^{2p+1}(0) P_\nu^{2p+1}(dn(z,k)) \quad \forall \nu \neq 2n \quad et \quad \nu \neq 2n+1 \\ Es_{2n+1}^{2m+1}(z,k^2) = -\frac{2Es_{2n+1}^{2m+1}(0,k^2)}{k(2n+2)D_1 P_{2n+2}(0)} \frac{cn(z,k)}{sn(z,k)} \sum_{p=0}^{p=n} (2p+1) D_{2p+1} \frac{\Gamma(2n+1-2p)}{\Gamma(2n+3+2p)} P_{2n+1}^{2p+1}(0) P_{2n+1}^{2p+1}(dn(z,k)) \end{cases}$$

Je complète sur les autres intervalles par les formules périodiques et de parité :

$$\begin{cases} Es_\nu^{2m+1}(z,k^2) = Es_\nu^{2m+1}(-z,k^2) \quad pour \quad z<0 \leftarrow parit\acute{e}\ positive \\ Es_\nu^{2m+1}(z,k^2) = -Es_\nu^{2m+1}(z-2K(k^2),k^2) \quad pour \quad z \in [2K(k^2),4K(k^2)] \leftarrow parit\acute{e}\ n\acute{e}gative\ par\ rapport\ \grave{a}\ 2K\ ou\ anti-p\acute{e}riodicit\acute{e}\ 2K \\ Es_\nu^{2m+1}(z,k^2) = Es_\nu^{2m+1}(Mod(z,4K(k^2)),k^2) \quad pour \quad z>4K(k^2) \Leftrightarrow Ec_\nu^{2m+1}(z+n\,4K(k^2),k^2) = Ec_\nu^{2m+1}(z,k^2) \quad \forall n \in \mathbf{N} \leftarrow p\acute{e}riodicit\acute{e}\ 4K \end{cases}$$

A première vue, il semble y avoir une singularité en z=0, toutefois l'étude de la limite suivante donne une valeur finie :

$$\lim_{z\to 0} \frac{cn(z,k)}{sn(z,k)} P_\nu^{2p+1}(dn(z,k)) = \begin{cases} -\frac{\nu(\nu+1)k}{2} \quad pour \quad p=0 \\ 0 \quad pour \quad p>0 \end{cases}$$

Auquel cas on obtient une valeur de la fonction de Lamé en 0, cohérente avec le développement

$$Es_\nu^{2m+1}(0,k^2) = \frac{2Es_\nu^{2m+1}(0,k^2)}{k(\nu+1)D_1 P_{\nu+1}(0)} D_1 \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu+2)} P_\nu^1(0) \frac{\nu(\nu+1)k}{2} \Rightarrow Es_\nu^{2m+1}(0,k^2) = Es_\nu^{2m+1}(0,k^2) \frac{P_\nu^1(0)}{(\nu+1)P_{\nu+1}(0)}$$

puisque : $P_\nu^1(0) = (\nu+1)P_{\nu+1}(0)$.

Fonctions de Lamé périodiques 2K : $Es_\nu^{2n+2}(z)$ pour $\nu\neq 2n+1$

En injectant le développement en série trigonométrique dans l'équation intégrale, et reconnaissant l'intégrale définie issue de la formule de sommation, il vient :

$$Es_\nu^{2m+2}(z,k^2)=dn(z,k)\left\{\sum_{p=0}^{p=\infty}D_{2p+2}Sin((2p+2)\varphi)\right\}\quad Posons\quad w=dn(z,k)$$

$$Es_\nu^{2m+2}(z,k^2)=-\frac{2Es_\nu^{2m+2}{}'(0,k^2)}{\pi D_2 k\nu(\nu+1)P_\nu(0)}cn(z,k)\int_{-2K(k^2)}^{2K(k^2)}du\ cn(u,k)P_\nu{}'(k\ sn(z,k)sn(u,k))Es_\nu^{2m+2}(u,k^2)$$

$$\Leftrightarrow Es_\nu^{2m+2}(z,k^2)=-\frac{2Es_\nu^{2m+2}{}'(0,k^2)}{\pi D_2 k\nu(\nu+1)P_\nu(0)}cn(z,k)\int_{-2K(k^2)}^{2K(k^2)}du\ dn(u,k)cn(u,k)P_\nu{}'(k\ sn(z,k)sn(u,k))\left\{\sum_{p=0}^{p=\infty}D_{2p+2}Sin((2p+2)\varphi)\right\}$$

$$\Leftrightarrow Es_\nu^{2m+2}(z,k^2)=-\frac{2Es_\nu^{2m+2}{}'(0,k^2)}{\pi D_2 k\nu(\nu+1)P_\nu(0)}cn(z,k)\sum_{p=0}^{p=\infty}D_{2p+2}\int_{-\pi}^{\pi}d\varphi\ Sin(\varphi)Sin((2p+2)\varphi)P_\nu{}'\left(\sqrt{1-w^2}Cos(\varphi)\right)$$

$$Comme\quad \int_{-\pi}^{\pi}d\varphi\ Sin(\varphi)Sin((2p+2)\varphi)P_\nu{}'\left(\sqrt{1-w^2}Cos(\varphi)\right)=\frac{2(2p+2)\pi}{\sqrt{1-w^2}}\frac{\Gamma(\nu-2p-1)}{\Gamma(\nu+2p+3)}P_\nu^{2p+2}(0)P_\nu^{2p+2}(w)$$

$$\Leftrightarrow Es_\nu^{2m+2}(z,k^2)=-\frac{4Es_\nu^{2m+2}{}'(0,k^2)}{D_2k^2\nu(\nu+1)P_\nu(0)}\frac{cn(z,k)}{sn(z,k)}\sum_{p=0}^{p=\infty}(2p+2)D_{2p+2}\frac{\Gamma(\nu-2p-1)}{\Gamma(\nu+2p+3)}P_\nu^{2p+2}(0)P_\nu^{2p+2}(dn(z,k))$$

$$De\ plus\quad Es_\nu^{2m+2}{}'(0,k^2)=\sum_{p=0}^{p=\infty}(-1)^p(2p+2)D_{2p+2}$$

On arrive au développement suivant qui d'origine possède la périodicité 4K :

$$\begin{cases}Es_\nu^{2m+2}(z,k^2)=dn(z,k)\left\{\sum_{p=0}^{p=\infty}D_{2p+2}Sin((2p+2)\varphi)\right\}\quad \varphi=\frac{\pi}{2}-am(z,k)\\ Es_\nu^{2m+2}{}'(0,k^2)=\sum_{p=0}^{p=\infty}D_{2p+2}(-1)^p(2p+2)\\ Es_\nu^{2m+2}(z,k^2)=-\frac{4Es_\nu^{2m+2}{}'(0,k^2)}{D_2k^2\nu(\nu+1)P_\nu(0)}\frac{cn(z,k)}{sn(z,k)}\sum_{p=0}^{p=\infty}(2p+2)D_{2p+2}\frac{\Gamma(\nu-2p-1)}{\Gamma(\nu+2p+3)}P_\nu^{2p+2}(0)P_\nu^{2p+2}(dn(z,k))\qquad \forall\nu\neq 2n+1\quad et\quad \nu\neq 2n+2\\ Es_{2n+2}^{2m+2}(z,k^2)=-\frac{4Es_{2n+2}^{2m+2}{}'(0,k^2)}{D_2k^2(2n+2)(2n+3)P_{2n+2}(0)}\frac{cn(z,k)}{sn(z,k)}\sum_{p=0}^{p=n}(2p+2)D_{2p+2}\frac{\Gamma(2n+1-2p)}{\Gamma(2n+5+2p)}P_{2n+2}^{2p+2}(0)P_{2n+2}^{2p+2}(dn(z,k))\end{cases}$$

A première vue, il semble également y avoir une singularité en z=0, toutefois l'étude de la limite suivante donne une valeur nulle:

$$\lim_{z\to 0}\frac{cn(z,k)}{sn(z,k)}P_\nu^{2p+2}(dn(z,k))=0\quad \forall p\geq 0$$

<u>Calcul des dérivées premières et secondes</u>

A partir des quatre développement établis précédemment , par dérivation on obtient :

$$Ec_{\nu}^{2m}\left(z,k^2\right)=2\frac{Ec_{\nu}^{2m}\left(0,k^2\right)}{C_0P_{\nu}(0)}\sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{C_{2p}}{1+\delta_{p,0}}\frac{\Gamma(\nu-2p+1)}{\Gamma(\nu+2p+1)}P_{\nu}^{2p}(0)P_{\nu}^{2p}(dn(z,k))$$

$$Ec_{\nu}^{2m+1}\left(z,k^2\right)=-2\frac{Ec_{\nu}^{2m+1\prime}\left(0,k^2\right)}{k(\nu+1)C_1P_{\nu+1}(0)}\sum_{p=0}^{p=\infty}C_{2p+1}\frac{\Gamma(\nu-2p)}{\Gamma(\nu+2p+2)}P_{\nu}^{2p+1}(0)P_{\nu}^{2p+1}(dn(z,k))$$

$$Es_{\nu}^{2m+1}\left(z,k^2\right)=-\frac{2Es_{\nu}^{2m+1}\left(0,k^2\right)}{k(\nu+1)D_1P_{\nu+1}(0)}\sum_{p=0}^{p=\infty}(2p+1)D_{2p+1}\frac{\Gamma(\nu-2p)}{\Gamma(\nu+2p+2)}P_{\nu}^{2p+1}(0)\frac{cn(z,k)}{sn(z,k)}P_{\nu}^{2p+1}(dn(z,k))$$

$$Es_{\nu}^{2m+2}\left(z,k^2\right)=-\frac{4Es_{\nu}^{2m+2\prime}\left(0,k^2\right)}{D_2k^2\nu(\nu+1)P_{\nu}(0)}\sum_{p=0}^{p=\infty}(2p+2)D_{2p+2}\frac{\Gamma(\nu-2p-1)}{\Gamma(\nu+2p+3)}P_{\nu}^{2p+2}(0)\frac{cn(z,k)}{sn(z,k)}P_{\nu}^{2p+2}(dn(z,k))$$

Les dérivées premières :

$$Ec_{\nu}^{2m}\left(z,k^2\right)=2\frac{Ec_{\nu}^{2m}\left(0,k^2\right)}{C_0P_{\nu}(0)}\sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{C_{2p}}{1+\delta_{p,0}}\frac{\Gamma(\nu-2p+1)}{\Gamma(\nu+2p+1)}P_{\nu}^{2p}(0)\frac{cn(z,k)}{sn(z,k)}\left((\nu-2p+1)P_{\nu+1}^{2p}(dn(z,k))-(\nu+1)dn(z,k)P_{\nu}^{2p}(dn(z,k))\right)$$

$$Ec_{\nu}^{2m+1}\left(z,k^2\right)=-2\frac{Ec_{\nu}^{2m+1\prime}\left(0,k^2\right)}{k(\nu+1)C_1P_{\nu+1}(0)}\sum_{p=0}^{p=\infty}C_{2p+1}\frac{\Gamma(\nu-2p)}{\Gamma(\nu+2p+2)}P_{\nu}^{2p+1}(0)\frac{cn(z,k)}{sn(z,k)}\left((\nu-2p)P_{\nu+1}^{2p+1}(dn(z,k))-(\nu+1)dn(z,k)P_{\nu}^{2p+1}(dn(z,k))\right)$$

$$Es_{\nu}^{2m+1}\left(z,k^2\right)=-\frac{2Es_{\nu}^{2m+1}\left(0,k^2\right)}{k(\nu+1)D_1P_{\nu+1}(0)}\sum_{p=0}^{p=\infty}(2p+1)D_{2p+1}\frac{\Gamma(\nu-2p)}{\Gamma(\nu+2p+2)}P_{\nu}^{2p+1}(0)\frac{\left((\nu-2p)cn^2(z,k)P_{\nu+1}^{2p+1}(dn(z,k))-dn(z,k)\left(1+(\nu+1)cn^2(z,k)\right)P_{\nu}^{2p+1}(dn(z,k))\right)}{sn^2(z,k)}$$

$$Es_{\nu}^{2m+2}\left(z,k^2\right)=-\frac{4Es_{\nu}^{2m+2\prime}\left(0,k^2\right)}{D_2k^2\nu(\nu+1)P_{\nu}(0)}\sum_{p=0}^{p=\infty}(2p+2)D_{2p+2}\frac{\Gamma(\nu-2p-1)}{\Gamma(\nu+2p+3)}P_{\nu}^{2p+2}(0)\frac{\left((\nu-2p-1)cn^2(z,k)P_{\nu+1}^{2p+2}(dn(z,k))-dn(z,k)\left(1+(\nu+1)cn^2(z,k)\right)P_{\nu}^{2p+2}(dn(z,k))\right)}{sn^2(z,k)}$$

Et les dérivées secondes :

$$Ec_{\nu}^{2m}\left(z,k^2\right)=2\frac{Ec_{\nu}^{2m}\left(0,k^2\right)}{C_0P_{\nu}(0)sn^2(z,k)}\sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{C_{2p}}{1+\delta_{p,0}}\frac{\Gamma(\nu-2p+1)}{\Gamma(\nu+2p+1)}P_{\nu}^{2p}(0)\begin{pmatrix}(\nu+1)\left((\nu+2)cn^2(z,k)dn^2(z,k)+sn^2(z,k)\left(dn^2(z,k)+k^2cn^2(z,k)\right)\right)P_{\nu}^{2p}(dn(z,k))-\\-(\nu-2p+1)dn(z,k)\left(1+(2\nu+3)cn^2(z,k)\right)P_{\nu+1}^{2p}(dn(z,k))+\\+(\nu-2p+1)(\nu-2p+2)cn^2(z,k)P_{\nu+2}^{2p}(dn(z,k))\end{pmatrix}$$

$$Ec_{\nu}^{2m+1}\left(z,k^2\right)=-2\frac{Ec_{\nu}^{2m+1\prime}\left(0,k^2\right)}{k(\nu+1)C_1P_{\nu+1}(0)sn^2(z,k)}\sum_{p=0}^{p=\infty}C_{2p+1}\frac{\Gamma(\nu-2p)}{\Gamma(\nu+2p+2)}P_{\nu}^{2p+1}(0)\begin{pmatrix}(\nu+1)\left((\nu+2)cn^2(z,k)dn^2(z,k)+sn^2(z,k)\left(dn^2(z,k)+k^2cn^2(z,k)\right)\right)P_{\nu}^{2p+1}(dn(z,k))-\\-(\nu-2p)dn(z,k)\left(1+(2\nu+3)cn^2(z,k)\right)P_{\nu+1}^{2p+1}(dn(z,k))+\\+(\nu-2p)(\nu-2p+1)cn^2(z,k)P_{\nu+2}^{2p+1}(dn(z,k))\end{pmatrix}$$

$$Es_{\nu}^{2m+1}\left(z,k^2\right)=-\frac{2Es_{\nu}^{2m+1}\left(0,k^2\right)cn(z,k)}{k(\nu+1)D_1P_{\nu+1}(0)sn^3(z,k)}\sum_{p=0}^{p=\infty}(2p+1)D_{2p+1}\frac{\Gamma(\nu-2p)}{\Gamma(\nu+2p+2)}P_{\nu}^{2p+1}(0)\begin{pmatrix}\left((\nu+2)(\nu+3)cn^2(z,k)dn^2(z,k)+sn^2(z,k)\left(k^2\left(1+(\nu+1)cn^2(z,k)\right)+(3\nu+5)dn^2(z,k)\right)\right)P_{\nu}^{2p}(dn(z,k))-\\-(\nu-2p)dn(z,k)\left(3+(2\nu+3)cn^2(z,k)\right)P_{\nu+1}^{2p}(dn(z,k))+\\+(\nu-2p)(\nu-2p+1)cn^2(z,k)P_{\nu+2}^{2p}(dn(z,k))\end{pmatrix}$$

$$Es_{\nu}^{2m+2}\left(z,k^2\right)=-\frac{4Es_{\nu}^{2m+2\prime}\left(0,k^2\right)cn(z,k)}{D_2k^2\nu(\nu+1)P_{\nu}(0)sn^3(z,k)}\sum_{p=0}^{p=\infty}(2p+2)D_{2p+2}\frac{\Gamma(\nu-2p-1)}{\Gamma(\nu+2p+3)}P_{\nu}^{2p+2}(0)\begin{pmatrix}\left((\nu+2)(\nu+3)cn^2(z,k)dn^2(z,k)+sn^2(z,k)\left(k^2\left(1+(\nu+1)cn^2(z,k)\right)+(3\nu+5)dn^2(z,k)\right)\right)P_{\nu}^{2p}(dn(z,k))-\\-(\nu-2p-1)dn(z,k)\left(3+(2\nu+3)cn^2(z,k)\right)P_{\nu+1}^{2p}(dn(z,k))+\\+(\nu-2p-1)(\nu-2p)cn^2(z,k)P_{\nu+2}^{2p}(dn(z,k))\end{pmatrix}$$

<u>Récurrence sur les développements en fonctions associées de Legendre de première espèce</u>

A partir des quatre développements :

$$Ec_\nu^{2m}(z,k^2)=2\frac{Ec_\nu^{2m}(0,k^2)}{C_0P_\nu(0)}\sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{C_{2p}}{1+\delta_{p,0}}\frac{\Gamma(\nu-2p+1)}{\Gamma(\nu+2p+1)}P_\nu^{2p}(0)P_\nu^{2p}(dn(z,k))$$
$$Ec_\nu^{2m+1}(z,k^2)=-2\frac{Ec_\nu^{2m+1\prime}(0,k^2)}{k(\nu+1)C_1P_{\nu+1}(0)}\sum_{p=0}^{p=\infty}C_{2p+1}\frac{\Gamma(\nu-2p)}{\Gamma(\nu+2p+2)}P_\nu^{2p+1}(0)P_\nu^{2p+1}(dn(z,k))$$
$$Es_\nu^{2m+1}(z,k^2)=-\frac{2Es_\nu^{2m+1}(0,k^2)}{k(\nu+1)D_1P_{\nu+1}(0)}\sum_{p=0}^{p=\infty}(2p+1)D_{2p+1}\frac{\Gamma(\nu-2p)}{\Gamma(\nu+2p+2)}P_\nu^{2p+1}(0)\frac{cn(z,k)}{sn(z,k)}P_\nu^{2p+1}(dn(z,k))$$
$$Es_\nu^{2m+2}(z,k^2)=-\frac{4Es_\nu^{2m+2\prime}(0,k^2)}{D_2k^2\nu(\nu+1)P_\nu(0)}\sum_{p=0}^{p=\infty}(2p+2)D_{2p+2}\frac{\Gamma(\nu-2p-1)}{\Gamma(\nu+2p+3)}P_\nu^{2p+2}(0)\frac{cn(z,k)}{sn(z,k)}P_\nu^{2p+2}(dn(z,k))$$

La forme générique des développements est proposé :

$$Ec_\nu^{2m}(z,k^2)=\frac{X_0}{2}\Gamma(\nu+1)P_\nu(dn(z,k))+\sum_{p=1}^{p=\infty}X_{2p}\Gamma(\nu-2p+1)P_\nu^{2p}(dn(z,k))\Rightarrow X_{2p}=\frac{P_\nu^{2p}(0)}{\Gamma(\nu+2p+1)}C_{2p}\Rightarrow C_{2p}=\frac{\Gamma(\nu+2p+1)}{P_\nu^{2p}(0)}X_{2p}$$
$$Ec_\nu^{2m+1}(z,k^2)=\sum_{p=0}^{p=\infty}X_{2p+1}\Gamma(\nu-2p)P_\nu^{2p+1}(dn(z,k))\Rightarrow X_{2p+1}=\frac{P_\nu^{2p+1}(0)}{\Gamma(\nu+2p+2)}C_{2p+1}\Rightarrow C_{2p+1}=\frac{\Gamma(\nu+2p+2)}{P_\nu^{2p+1}(0)}X_{2p+1}$$
$$Es_\nu^{2m+1}(z,k^2)=\frac{cn(z,k)}{sn(z,k)}\sum_{p=0}^{p=\infty}X_{2p+1}\Gamma(\nu-2p)P_\nu^{2p+1}(dn(z,k))\Rightarrow X_{2p+1}=\frac{(2p+1)P_\nu^{2p+1}(0)}{\Gamma(\nu+2p+2)}D_{2p+1}\Rightarrow D_{2p+1}=\frac{\Gamma(\nu+2p+2)}{(2p+1)P_\nu^{2p+1}(0)}X_{2p+1}$$
$$Es_\nu^{2m+2}(z,k^2)=\frac{cn(z,k)}{sn(z,k)}\sum_{p=0}^{p=\infty}X_{2p+2}\Gamma(\nu-2p-1)P_\nu^{2p+2}(dn(z,k))\Rightarrow X_{2p+2}=D_{2p+2}\frac{(2p+2)P_\nu^{2p+2}(0)}{\Gamma(\nu+2p+3)}\Rightarrow D_{2p+2}=\frac{\Gamma(\nu+2p+3)}{(2p+2)P_\nu^{2p+2}(0)}X_{2p+2}$$

Pour la suite des calculs, j'utilise les expressions suivantes :

$$\frac{P_\nu^{2p}(0)}{P_\nu^{2p-2}(0)}=-(\nu-2p+2)(\nu+2p-1)\qquad\frac{P_\nu^{2p}(0)}{P_\nu^{2p+2}(0)}=-\frac{1}{(\nu-2p)(\nu+2p+1)}$$
$$\frac{P_\nu^{2p+1}(0)}{P_\nu^{2p-1}(0)}=-(\nu-2p+1)(\nu+2p)\qquad\frac{P_\nu^{2p+1}(0)}{P_\nu^{2p+3}(0)}=-\frac{1}{(\nu-2p-1)(\nu+2p+3)}$$
$$\frac{P_\nu^{2p+2}(0)}{P_\nu^{2p}(0)}=-(\nu-2p)(\nu+2p+1)\qquad\frac{P_\nu^{2p+2}(0)}{P_\nu^{2p+4}(0)}=-\frac{1}{(\nu-2p-1)(\nu+2p+3)}$$
$$P_\nu^1(0)=(\nu+1)P_{\nu+1}(0)\qquad P_\nu^2(0)=-\nu(\nu+1)P_\nu(0)$$

Je rappelle les quatre développements trigonométriques :

Fonctions de Lamé périodiques	*Type de développement*	*Coefficient de la récurrence*	*Formule de la récurrence*
$Ec_\nu^{2m}(z,k^2)$	$Ec_\nu^{2m}(z,k^2)=dn(z,k)\left\{\frac{C_0}{2}+\sum_{p=1}^{p=\infty}C_{2p}Cos(2p\varphi)\right\}$	$\alpha_p=\begin{cases}\nu(\nu+1)k^2 & pour \quad p=0\\ \frac{1}{2}(\nu-2p)(\nu+2p+1)k^2 & pour \quad p\geq 1\end{cases}$ $\beta_p=4p^2(2-k^2)-(2h-\nu(\nu+1)k^2)$ $\gamma_p=\frac{1}{2}(\nu-2p+1)(\nu+2p)k^2$	$\begin{cases}\beta_0C_0+\alpha_0C_2=0\\ \gamma_pC_{2p-2}+\beta_pC_{2p}+\alpha_pC_{2p+2}=0\end{cases}$
$Ec_\nu^{2m+1}(z,k^2)$	$Ec_\nu^{2m+1}(z,k^2)=dn(z,k)\sum_{p=0}^{p=\infty}C_{2p+1}Cos((2p+1)\varphi)$	$\alpha_p=\frac{1}{2}(\nu-2p-1)(\nu+2p+2)k^2$ $\beta_p=\begin{cases}2-k^2+\frac{1}{2}\nu(\nu+1)k^2-(2h-\nu(\nu+1)k^2) & pour \quad p=0\\ (2p+1)^2(2-k^2)-(2h-\nu(\nu+1)k^2) & pour \quad p\geq 1\end{cases}$ $\gamma_p=\frac{1}{2}(\nu-2p)(\nu+2p+1)k^2$	$\begin{cases}\beta_0C_1+\alpha_0C_3=0\\ \gamma_pC_{2p-1}+\beta_pC_{2p+1}+\alpha_pC_{2p+3}=0\end{cases}$
$Es_\nu^{2m+1}(z,k^2)$	$Es_\nu^{2m+1}(z,k^2)=dn(z,k)\sum_{p=0}^{p=\infty}D_{2p+1}Sin((2p+1)\varphi)$	$\alpha_p=\frac{1}{2}(\nu-2p-1)(\nu+2p+2)k^2$ $\beta_p=\begin{cases}2-k^2-\frac{1}{2}\nu(\nu+1)k^2-(2h-\nu(\nu+1)k^2) & pour \quad p=0\\ (2p+1)^2(2-k^2)-(2h-\nu(\nu+1)k^2) & pour \quad p\geq 1\end{cases}$ $\gamma_p=\frac{1}{2}(\nu-2p)(\nu+2p+1)k^2$	$\begin{cases}\beta_0D_1+\alpha_0D_3=0\\ \gamma_pD_{2p-1}+\beta_pD_{2p+1}+\alpha_pD_{2p+3}=0\end{cases}$
$Es_\nu^{2m+2}(z,k^2)$	$Es_\nu^{2m+2}(z,k^2)=dn(z,k)\sum_{p=0}^{p=\infty}D_{2p+2}Sin((2p+2)\varphi)$	$\alpha_p=\frac{1}{2}(\nu-2p-2)(\nu+2p+3)k^2$ $\beta_p=(2p+2)^2(2-k^2)-(2h-\nu(\nu+1)k^2)$ $\gamma_p=\frac{1}{2}(\nu-2p-1)(\nu+2p+2)k^2$	$\begin{cases}\beta_0D_2+\alpha_0D_4=0\\ \gamma_pD_{2p}+\beta_pD_{2p+2}+\alpha_pD_{2p+4}=0\end{cases}$

Ce qui donne pour les quatre développements en fonctions de Legendre, une fois les substitutions faîtes dans la formule de récurrence :

Type de développement	*Coefficient de la récurrence*	*Formule de la récurrence*
$Ec_\nu^{2m}\left(z,k^2\right)=\frac{X_0}{2}\Gamma(\nu+1)P_\nu\left(dn(z,k)\right)+$ $+\sum_{p=1}^{p=\infty}X_{2p}\Gamma(\nu-2p+1)P_\nu^{2p}\left(dn(z,k)\right)$	$\delta_p=-\alpha_p\frac{\nu+2p+2}{\nu-2p}=\begin{cases}-(\nu+1)(\nu+2)k^2 & pour\quad p=0\\ \frac{1}{2}(\nu+2p+2)(\nu+2p+1)k^2 & pour\quad p\geq 1\end{cases}$. $\beta_p=4p^2\left(2-k^2\right)-\left(2h-\nu(\nu+1)k^2\right)$ $\varepsilon_p=-\gamma_p\frac{\nu-2p+2}{\nu+2p}=-\frac{1}{2}(\nu-2p+1)(\nu-2p+2)k^2$	$\begin{cases}\beta_0X_0+\delta_0X_2=0\\ \varepsilon_pX_{2p-2}+\beta_pX_{2p}+\delta_pX_{2p+2}=0\end{cases}$ $X_0=2\frac{Ec_\nu^{2m}\left(0,k^2\right)}{\Gamma(\nu+1)}$
$Ec_\nu^{2m+1}\left(z,k^2\right)=\sum_{p=0}^{p=\infty}X_{2p+1}\Gamma(\nu-2p)P_\nu^{2p+1}\left(dn(z,k)\right)$	$\delta_p=-\alpha_p\frac{\nu+2p+3}{\nu-2p-1}=-\frac{1}{2}(\nu+2p+2)(\nu+2p+3)k^2$ $\beta_p=\begin{cases}2-k^2+\frac{1}{2}\nu(\nu+1)k^2-\left(2h-\nu(\nu+1)k^2\right) & pour\quad p=0\\ (2p+1)^2\left(2-k^2\right)-\left(2h-\nu(\nu+1)k^2\right) & pour\quad p\geq 1\end{cases}$ $\varepsilon_p=-\gamma_p\frac{\nu-2p+1}{\nu+2p+1}=-\frac{1}{2}(\nu-2p)(\nu-2p+1)k^2$	$\begin{cases}\beta_0X_1+\delta_0X_3=0\\ \varepsilon_pX_{2p-1}+\beta_pX_{2p+1}+\delta_pX_{2p+3}=0\end{cases}$ $X_1=-2\frac{Ec_\nu^{2m+1}{}'\left(0,k^2\right)}{k\Gamma(\nu+2)}$
$Es_\nu^{2m+1}\left(z,k^2\right)=\frac{cn(z,k)}{sn(z,k)}\sum_{p=0}^{p=\infty}X_{2p+1}\Gamma(\nu-2p)P_\nu^{2p+1}\left(dn(z,k)\right)$	$\delta_p=-\alpha_p\frac{\nu+2p+3}{\nu-2p-1}\frac{2p+1}{2p+3}=-=\frac{1}{2}(\nu+2p+2)(\nu+2p+3)\frac{2p+1}{2p+3}k^2$ $\beta_p=\begin{cases}2-k^2-\frac{1}{2}\nu(\nu+1)k^2-\left(2h-\nu(\nu+1)k^2\right) & pour\quad p=0\\ (2p+1)^2\left(2-k^2\right)-\left(2h-\nu(\nu+1)k^2\right) & pour\quad p\geq 1\end{cases}$ $\varepsilon_p=-\gamma_p\frac{\nu-2p+1}{\nu+2p+1}\frac{2p+1}{2p-1}=-\frac{1}{2}(\nu-2p)(\nu-2p+1)\frac{2p+1}{2p-1}k^2$	$\begin{cases}\beta_0X_1+\delta_0X_3=0\\ \varepsilon_pX_{2p-1}+\beta_pX_{2p+1}+\delta_pX_{2p+3}=0\end{cases}$ $X_1=-\frac{2Es_\nu^{2m+1}\left(0,k^2\right)}{k\Gamma(\nu+2)}$
$Es_\nu^{2m+2}\left(z,k^2\right)=\frac{cn(z,k)}{sn(z,k)}\sum_{p=0}^{p=\infty}X_{2p+2}\Gamma(\nu-2p-1)P_\nu^{2p+2}\left(dn(z,k)\right)$	$\delta_p=-\alpha_p\frac{\nu+2p+4}{\nu-2p-2}\frac{2p+2}{2p+4}=-\frac{1}{2}(\nu+2p+3)(\nu+2p+4)\frac{p+1}{p+2}k^2$ $\beta_p=(2p+2)^2\left(2-k^2\right)-\left(2h-\nu(\nu+1)k^2\right)$ $\varepsilon_p=-\gamma_p\frac{\nu-2p}{\nu+2p+2}\frac{2p+2}{2p}=-\frac{1}{2}(\nu-2p)(\nu+2p+2)\frac{p+1}{p}k^2$	$\begin{cases}\beta_0X_2+\delta_0X_4=0\\ \varepsilon_pX_{2p}+\beta_pX_{2p+2}+\delta_pX_{2p+4}=0\end{cases}$ $X_2=\frac{8Es_\nu^{2m+2}{}'\left(0,k^2\right)}{k^2\Gamma(\nu+3)}$

Solutions périodiques 8K générales de l'équation de Lamé dîtes fonctions algébriques de Lamé

Dans l'article d'E.L.Ince de 1940, « VII—Further investigations into the periodic lamé functions », l'auteur décrit tout d'abord la récurrence générale pour un développement présentant la périodicité 8K et de parité positive : $y(z)=\sum_{r=-\infty}^{r=+\infty} A_r Cos\left(\left(\frac{4r-1}{2}\right)am(z,k)\right)$. *En injectant ce type de développement dans l'équation de Lamé on aboutit à la récurrence à trois termes suivantes :*

$$\begin{cases}\eta=2h-\nu(\nu+1)k^2\\ \frac{1}{2}(2\nu+4r+3)(2\nu-4r-1)k^2A_{r+1}+\left\{4\eta-(4r-1)^2(2-k^2)\right\}A_r+\frac{1}{2}(2\nu+4r-3)(2\nu-4r+5)k^2A_{r-1}=0\end{cases}$$

La récurrence à trois termes est équivalente à un système linéaire bilatéral dont la matrice est tri-diagonale. Là encore le développement est valide dès lors que h (ou η) est une valeur propre de cette matrice tri-diagonale. Une approximation du système linéaire consiste à tronquer des deux cotés la matrice à une taille donnée et de résoudre le problème aux valeurs propres, en ordonnant ces dernières de manière croissante. Les coefficients sont les coordonnées du vecteur propres associés, dont on peut par exemple choisir comme normalisation que le terme central A_0 soit égal à 1.

$$\begin{cases}\eta=2h-\nu(\nu+1)k^2\\ -\frac{1}{2}(2\nu+4r+3)(2\nu-4r-1)k^2A_{r+1}+(4r-1)^2(2-k^2)A_r-\frac{1}{2}(2\nu+4r-3)(2\nu-4r+5)k^2A_{r-1}=4\eta A_r\\ \Leftrightarrow \alpha_rA_{r+1}+\beta_rA_r+\gamma_rA_{r-1}=4\left(2h-\nu(\nu+1)k^2\right)A_r\\ \alpha_r=-\frac{1}{2}(2\nu+4r+3)(2\nu-4r-1)k^2\\ \beta_r=(4r-1)^2(2-k^2)\\ \gamma_r=-\frac{1}{2}(2\nu+4r-3)(2\nu-4r+5)k^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{A}_\infty=\begin{bmatrix}\dots & A_{-n} & \dots & A_{-1} & A_0 & A_1 & \dots & A_n & \dots\end{bmatrix}\quad \mathbf{M}_\infty.\mathbf{A}_\infty=4\eta\mathbf{A}_\infty$$

$$\approx \mathbf{A}_{2n+1}=\begin{bmatrix}A_{-n} & A_{-n+1} & \dots & A_{-1} & A_0 & A_1 & \dots & A_{n-1} & A_n\end{bmatrix}\quad \mathbf{M}_{2n+1}.\mathbf{A}_{2n+1}=4\eta\mathbf{A}_{2n+1}$$

$$\mathbf{M}_{2n+1}=\begin{bmatrix}\beta_{-n} & \alpha_{-n} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0\\ \gamma_{-n+1} & \beta_{-n+1} & \alpha_{-n+1} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & 0 & \gamma_{-1} & \beta_{-1} & \alpha_{-1} & 0 & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & 0 & \gamma_0 & \beta_0 & \alpha_0 & 0 & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & 0 & \gamma_1 & \beta_1 & \alpha_1 & 0 & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \gamma_{n-1} & \beta_{n-1} & \alpha_{n-1}\\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \gamma_n & \beta_n\end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\lambda & valeur\ propre\\ \mathbf{A}_{2n+1} & vecteur\ propre\end{array}\right\}de\ \mathbf{M}_{2n+1}\Leftrightarrow h=\frac{\lambda+4\nu(\nu+1)k^2}{8}$$

A partir de cette construction on en déduit les deux types de développement paire et impaire, solution de même valeur propre h et linéairement indépendante :

$$y^+(z)=\sum_{r=-\infty}^{r=+\infty}A_rCos\left(\left(\frac{4r-1}{2}\right)am(z,k)\right)\quad y^-(z)=\sum_{r=-\infty}^{r=+\infty}A_rSin\left(\left(\frac{4r-1}{2}\right)am(z,k)\right)$$

Il existe alors deux solutions spécifiques de période 8k pour lequel le développement bilatéral est simplifié, à savoir les valeurs telles que :

$$\begin{cases} 2\nu = 4p+1 \\ ou \\ 2\nu = 4p-1 \end{cases}$$

Pour ses valeurs respectives, on peut montrer par la récurrence que le développement est limité dans un sens, mais il demeure illimité dans l'autre sens à savoir :

$$2\nu = 4p-1 \Rightarrow A_r = 0 \quad pour \quad r > p \Rightarrow y(z) = \sum_{r=-\infty}^{r=+p} A_r Cos\left(\left(\frac{4r-1}{2}\right)am(z,k)\right)$$

$$2\nu = 4p+1 \Rightarrow A_{-r} = 0 \quad pour \quad r > p \Rightarrow y(z) = \sum_{r=-p}^{r=+\infty} A_r Cos\left(\left(\frac{4r-1}{2}\right)am(z,k)\right) = \sum_{r=-\infty}^{r=+p} A_{-r} Cos\left(\left(\frac{4r+1}{2}\right)am(z,k)\right)$$

Il est aisé de s'en convaincre à l'aide des relations de récurrence et le test numérique est plus délicat car les matrices sont limités en taille et le premier cas est facile à prouver à avec une matrice de taille limité mais pour le deuxième cas, il suffit d'inverser le sens des indices et de retrouver la propriété attendue.

Pour autant cela ne nous indique pas en quoi ces deux valeurs spécifiques conduisent à un développement fini. Pour cela E.L.Ince développe une autre méthode en partant de l'expression analytique exacte de la solution pour $\nu = \frac{1}{2} \Rightarrow y(z) = \sqrt{dn(z,k) + cn(z,k)}$.

Dans cette hypothèse, Ince va donc proposer des développements de la forme :

$$2\nu = 4p+1 \quad et \quad p \in \mathbf{N} \rightarrow \begin{cases} y^+(z) = \sqrt{dn(z,k)+cn(z,k)}\left\{\sum_{r=0}^{r=+\infty} A_r sn^{2r}(z,k) + cn(z,k)dn(z,k)\sum_{r=0}^{r=+\infty} B_r sn^{2r}(z,k)\right\} \\ y^-(z) = \sqrt{dn(z,k)-cn(z,k)}\left\{\sum_{r=0}^{r=+\infty} A_r sn^{2r}(z,k) - cn(z,k)dn(z,k)\sum_{r=0}^{r=+\infty} B_r sn^{2r}(z,k)\right\} \end{cases}$$

et

$$2\nu = 4p-1 \quad et \quad p \in \mathbf{N} \rightarrow \begin{cases} y^+(z) = \sqrt{dn(z,k)+cn(z,k)}\left\{dn(z,k)\sum_{r=0}^{r=+\infty} C_r sn^{2r}(z,k) + cn(z,k)\sum_{r=0}^{r=+\infty} D_r sn^{2r}(z,k)\right\} \\ y^-(z) = \sqrt{dn(z,k)-cn(z,k)}\left\{dn(z,k)\sum_{r=0}^{r=+\infty} C_r sn^{2r}(z,k) - cn(z,k)\sum_{r=0}^{r=+\infty} D_r sn^{2r}(z,k)\right\} \end{cases}$$

Et E.L.Ince montre dans ce cas que les développements sont en réalité fini, d'où leur nom de fonction algébrique.

Solutions périodiques 8K spécifique de l'équation de Lamé dîtes fonctions algébriques de Lamé

les deux algorithmes de récurrence pour la construction de deux types de fonctions de Lamé périodiques de période 8K. L'auteur recherche des solutions de l'équation de Lamé sous la forme :

$$y(z)=\sqrt{cn(z,k)+dn(z,k)}\,w(z)$$

L'équation de Lamé pour la fonction w(z) s'écrit :

$$y''(z)+\left(h-\nu(\nu+1)k^2sn^2(z,k)\right)y(z)=0$$

$$y(z)=\sqrt{cn(z,k)+dn(z,k)}\,w(z)\Rightarrow w''(z)-\frac{1-cn(z,k)dn(z,k)}{sn(z,k)}w'(z)+\left(h-\frac{1+k^2}{4}-\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\left(\nu+\frac{3}{2}\right)k^2sn^2(z,k)\right)w(z)=0$$

$$Posons\quad H=h-\frac{1+k^2}{4}\Rightarrow w''(z)-\frac{1-cn(z,k)dn(z,k)}{sn(z,k)}w'(z)+\left(H-\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\left(\nu+\frac{3}{2}\right)k^2sn^2(z,k)\right)w(z)=0$$

En transposant les deux formes choisies de développement de parité positive, comme suit :

$$2\nu=4p+1\quad et\quad p\in\mathbf{N}\to y(z)=Ec_{2p+\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}}(z,k)=\sqrt{dn(z,k)+cn(z,k)}\left\{\sum_{r=0}^{r=+\infty}A_r sn^{2r}(z,k)+cn(z,k)dn(z,k)\sum_{r=0}^{r=+\infty}B_r sn^{2r}(z,k)\right\}$$

et

$$2\nu=4p-1\quad et\quad p\in\mathbf{N}\to y(z)=Ec_{2p-\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}}(z,k)=\sqrt{dn(z,k)+cn(z,k)}\left\{dn(z,k)\sum_{r=0}^{r=+\infty}C_r sn^{2r}(z,k)+cn(z,k)\sum_{r=0}^{r=+\infty}D_r sn^{2r}(z,k)\right\}$$

Dans l'équation modifiée de Lamé, on constate que les développements sont finis lorsque p est un entier. Les deux développements donnent des fonctions paires de périodes 8K. Pour construire des fonctions impaires de même valeur propre h, il suffit de remplacer cn(z,k) par -cn(z,k) avec les mêmes coefficient, soit :

$$2\nu=4p+1\quad et\quad p\in\mathbf{N}\to y(z)=Es_{2p+\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}}(z,k)=\sqrt{dn(z,k)-cn(z,k)}\left\{\sum_{r=0}^{r=+\infty}A_r sn^{2r}(z,k)-cn(z,k)dn(z,k)\sum_{r=0}^{r=+\infty}B_r sn^{2r}(z,k)\right\}$$

et

$$2\nu=4p-1\quad et\quad p\in\mathbf{N}\to y(z)=Es_{2p-\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}}(z,k)=\sqrt{dn(z,k)-cn(z,k)}\left\{dn(z,k)\sum_{r=0}^{r=+\infty}C_r sn^{2r}(z,k)-cn(z,k)\sum_{r=0}^{r=+\infty}D_r sn^{2r}(z,k)\right\}$$

De plus on tiendra compte de l'équivalence des expressions suivantes qui permet justement de mieux voir la parité des fonctions mises en jeu :

$$\sqrt{dn(z,k)+cn(z,k)}=\sqrt{2}\frac{cn\left(\frac{z}{2},k\right)dn\left(\frac{z}{2},k\right)}{\sqrt{1-k^2sn^4\left(\frac{z}{2},k\right)}}\qquad et\qquad \sqrt{dn(z,k)-cn(z,k)}=\sqrt{2}\sqrt{1-k^2}\frac{sn\left(\frac{z}{2},k\right)}{\sqrt{1-k^2sn^4\left(\frac{z}{2},k\right)}}$$

On obtient les relations de récurrence croisée entre coefficients des développements comme suit :

$$2\nu = 4p+1 \Rightarrow p = \frac{2\nu - 1}{4}$$

$$r \geq 0 \quad \begin{cases} A_{-1} = B_{-1} = 0 \\ (2r+2)^2 A_{r+1} + \left\{H - 2r(2r+1)(1+k^2)\right\} A_r - 4(p-r+1)(p+r)k^2 A_{r-1} - (2r+2)B_{r+1} + (2r+1)(1+k^2)B_r - 2rk^2 B_{r-1} = 0 \\ (2r+2)^2 B_{r+1} + \left\{H - (2r+1)(2r+2)(1+k^2)\right\} B_r - 4(p-r)(p+r+1)k^2 B_{r-1} - (2r+2)A_{r+1} = 0 \\ Développement\ \ fini \quad \forall r \geq p \quad B_r = 0 \quad et \quad \forall r \geq p+1 \quad A_r = 0 \end{cases}$$

$$2\nu = 4p-1 \Rightarrow p = \frac{2\nu + 1}{4}$$

$$r \geq 0 \quad \begin{cases} C_{-1} = D_{-1} = 0 \\ (2r+2)^2 C_{r+1} + \left\{H - (2r+1)(2r+2)k^2 - 2r(2r+1)\right\} C_r - 4(p^2 - r^2)k^2 C_{r-1} - (2r+2)D_{r+1} + (2r+1)D_r = 0 \\ (2r+2)^2 D_{r+1} + \left\{H - 2r(2r+1)k^2 - (2r+1)(2r+2)\right\} D_r - 4(p^2 - r^2)k^2 D_{r-1} - (2r+2)C_{r+1} + (2r+1)k^2 C_r = 0 \\ Développement\ \ fini \quad \forall r \geq p \quad C_r = D_r = 0 \end{cases}$$

La finitude des développements fait que l'on peut les écrire dorénavant :

$$2\nu = 4p+1 \quad et \quad p \in \mathbf{N} \rightarrow \begin{cases} Ec^{m+\frac{1}{2}}_{2p+\frac{1}{2}}(z,k) = \sqrt{2}\,\dfrac{cn\left(\frac{z}{2},k\right)dn\left(\frac{z}{2},k\right)}{\sqrt{1-k^2 sn^4\left(\frac{z}{2},k\right)}}\left\{\sum_{r=0}^{r=p} A_r sn^{2r}(z,k) + cn(z,k)dn(z,k)\sum_{r=0}^{r=p-1} B_r sn^{2r}(z,k)\right\} \\ Es^{m+\frac{1}{2}}_{2p+\frac{1}{2}}(z,k) = \sqrt{2}\sqrt{1-k^2}\,\dfrac{sn\left(\frac{z}{2},k\right)}{\sqrt{1-k^2 sn^4\left(\frac{z}{2},k\right)}}\left\{\sum_{r=0}^{r=p} A_r sn^{2r}(z,k) - cn(z,k)dn(z,k)\sum_{r=0}^{r=p-1} B_r sn^{2r}(z,k)\right\} \end{cases}$$

et

$$2\nu = 4p-1 \quad et \quad p \in \mathbf{N} \rightarrow \begin{cases} Ec^{m+\frac{1}{2}}_{2p-\frac{1}{2}}(z,k) = \sqrt{2}\,\dfrac{cn\left(\frac{z}{2},k\right)dn\left(\frac{z}{2},k\right)}{\sqrt{1-k^2 sn^4\left(\frac{z}{2},k\right)}}\left\{dn(z,k)\sum_{r=0}^{r=p-1} C_r sn^{2r}(z,k) + cn(z,k)\sum_{r=0}^{r=p-1} D_r sn^{2r}(z,k)\right\} \\ Es^{m+\frac{1}{2}}_{2p-\frac{1}{2}}(z,k) = \sqrt{2}\sqrt{1-k^2}\,\dfrac{sn\left(\frac{z}{2},k\right)}{\sqrt{1-k^2 sn^4\left(\frac{z}{2},k\right)}}\left\{dn(z,k)\sum_{r=0}^{r=p-1} C_r sn^{2r}(z,k) - cn(z,k)\sum_{r=0}^{r=p-1} D_r sn^{2r}(z,k)\right\} \end{cases}$$

Pour construire ces développements, je vais là encore me ramener à un problème de valeurs propres matricielles puisqu'il est facile de se rendre compte qu'une récurrence à trois termes correspond à la recherche des valeurs propres d'une matrice tri-diagonale.

Si l'on sépare en deux blocs les coefficients A_r et B_r , ainsi que C_r et D_r alors il est facile de se convaincre que le problème matriciel consiste à construire une super-matrice 2x2 constituée pour chaque bloc d'une matrice tri-diagonale.

On écrira symboliquement les deux systèmes matriciels :

$$2\nu = 4p+1 \Rightarrow p = \frac{2\nu-1}{4} \quad r \geq 0 \quad \begin{cases} A_{-1} = B_{-1} = 0 \\ \alpha_r^1 A_{r+1} + \beta_r^1 A_r + \gamma_r^1 A_{r-1} + \zeta_r^1 B_{r+1} + \varepsilon_r^1 B_r + \eta_r^1 B_{r-1} = HA_r \\ \zeta_r^2 B_{r+1} + \varepsilon_r^2 B_r + \eta_r^2 B_{r-1} + \alpha_r^2 A_{r+1} + \beta_r^2 A_r + \gamma_r^2 A_{r-1} = HB_r \\ D\acute{e}veloppement\ fini \quad \forall r \geq p \quad B_r = 0 \quad et \quad \forall r \geq p+1 \quad A_r = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix}\mathbf{M}_{11} \\ matrice \quad (p+1)\times(p+1)\end{matrix} = \begin{bmatrix} \beta_0^1 & \alpha_0^1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \gamma_1^1 & \beta_1^1 & \alpha_1^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \gamma_{p-2}^1 & \beta_{p-2}^1 & \alpha_{p-2}^1 & 0 \\ \dots & \dots & 0 & \gamma_{p-2}^1 & \beta_{p-1}^1 & \alpha_{p-1}^1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \gamma_p^1 & \beta_p^1 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix}\mathbf{M}_{12} \\ matrice \quad (p+1)\times p\end{matrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_0^1 & \zeta_0^1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \eta_1^1 & \varepsilon_1^1 & \zeta_1^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \eta_{p-3}^1 & \varepsilon_{p-3}^1 & \zeta_{p-3}^1 & 0 \\ \dots & \dots & 0 & \eta_{p-2}^1 & \varepsilon_{p-2}^1 & \zeta_{p-2}^1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \eta_{p-1}^1 & \varepsilon_{p-1}^1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix}\mathbf{M}_{21} \\ matrice \quad p\times(p+1)\end{matrix} = \begin{bmatrix} \beta_0^2 & \alpha_0^2 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \gamma_1^2 & \beta_1^2 & \alpha_1^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \gamma_{p-3}^2 & \beta_{p-3}^2 & \alpha_{p-3}^2 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & 0 & \gamma_{p-2}^2 & \beta_{p-2}^2 & \alpha_{p-2}^2 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \gamma_{p-1}^2 & \beta_{p-1}^2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix}\mathbf{M}_{2} \\ matrice \quad p\times p\end{matrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_0^2 & \zeta_0^2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \eta_1^2 & \varepsilon_1^2 & \zeta_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \eta_{p-3}^2 & \varepsilon_{p-3}^2 & \zeta_{p-3}^2 & 0 \\ \dots & \dots & 0 & \eta_{p-2}^2 & \varepsilon_{p-2}^2 & \zeta_{p-2}^2 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \eta_{p-1}^2 & \varepsilon_{p-1}^2 \end{bmatrix}$$

$$Probl\grave{e}me\ aux\ valeurs\ propres \quad \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{p+1} \\ B_p \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} A_{p+1} \\ B_p \end{bmatrix} \quad \begin{cases} \mathbf{A}_{p+1} = [A_0, \dots, A_p]^t \\ \mathbf{B}_p = [B_0, \dots, B_{p-1}]^t \\ \mathbf{X}_{2p+1} = [\mathbf{A}_{p+1}, \mathbf{B}_p]^t \end{cases} \Rightarrow Nombre\ de\ valeurs\ propres = 2p+1$$

$$2\nu = 4p-1 \Rightarrow p = \frac{2\nu+1}{4} \quad r \geq 0 \quad \begin{cases} C_{-1} = D_{-1} = 0 \\ \alpha_r^1 C_{r+1} + \beta_r^1 C_r + \gamma_r^1 C_{r-1} + \zeta_r^1 D_{r+1} + \varepsilon_r^1 D_r + \eta_r^1 D_{r-1} = HC_r \\ \zeta_r^2 D_{r+1} + \varepsilon_r^2 D_r + \eta_r^2 D_r + \alpha_r^2 C_{r+1} + \beta_r^2 C_r + \gamma_r^2 C_{r-1} = HD_r \\ D\acute{e}veloppement\ fini \quad \forall r \geq p \quad C_r = D_r = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix}\mathbf{M}_{11} \\ matrice \quad p\times p\end{matrix} = \begin{bmatrix} \beta_0^1 & \alpha_0^1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \gamma_1^1 & \beta_1^1 & \alpha_1^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \gamma_{p-3}^1 & \beta_{p-3}^1 & \alpha_{p-3}^1 & 0 \\ \dots & \dots & 0 & \gamma_{p-2}^1 & \beta_{p-2}^1 & \alpha_{p-2}^1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \gamma_{p-1}^1 & \beta_{p-1}^1 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix}\mathbf{M}_{12} \\ matrice \quad p\times p\end{matrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_0^1 & \zeta_0^1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \eta_1^1 & \varepsilon_1^1 & \zeta_1^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \eta_{p-3}^1 & \varepsilon_{p-3}^1 & \zeta_{p-3}^1 & 0 \\ \dots & \dots & 0 & \eta_{p-2}^1 & \varepsilon_{p-2}^1 & \zeta_{p-2}^1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \eta_{p-1}^1 & \varepsilon_{p-1}^1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix}\mathbf{M}_{21} \\ matrice \quad p\times p\end{matrix} = \begin{bmatrix} \beta_0^2 & \alpha_0^2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \gamma_1^2 & \beta_1^2 & \alpha_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \gamma_{p-3}^2 & \beta_{p-3}^2 & \alpha_{p-3}^2 & 0 \\ \dots & \dots & 0 & \gamma_{p-2}^2 & \beta_{p-2}^2 & \alpha_{p-2}^2 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \gamma_{p-1}^2 & \beta_{p-1}^2 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix}\mathbf{M}_{22} \\ matrice \quad p\times p\end{matrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_0^2 & \zeta_0^2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \eta_1^2 & \varepsilon_1^2 & \zeta_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \eta_{p-3}^2 & \varepsilon_{p-3}^2 & \zeta_{p-3}^2 & 0 \\ \dots & \dots & 0 & \eta_{p-2}^2 & \varepsilon_{p-2}^2 & \zeta_{p-2}^2 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \eta_{p-1}^2 & \varepsilon_{p-1}^2 \end{bmatrix}$$

$$Probl\grave{e}me\ aux\ valeurs\ propres \quad \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_p \\ \mathbf{D}_p \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} \mathbf{C}_p \\ \mathbf{D}_p \end{bmatrix} \quad \begin{cases} \mathbf{C}_p = [C_0, \dots, C_{p-1}]^t \\ \mathbf{D}_p = [D_0, \dots, D_{p-1}]^t \\ \mathbf{X}_{2p} = [\mathbf{C}_p, \mathbf{D}_p]^t \end{cases} \Rightarrow Nombre\ de\ valeurs\ propres = 2p$$

Pour la recherche des valeurs propres et des vecteurs propres, on ordonne par valeur croissante des valeurs propres et l'on normalise les vecteurs propres de telle manière que le premier coefficient du vecteur propre soit égal à 1.

Valeurs spéciales des fonctions périodiques

À des fins de comparaison avec d'autres implémentations, voici les valeurs spéciales en z=0 :

$$2\nu = 4p+1 \quad et \quad p \in \mathbf{N} \rightarrow \left\{ Ec_{2p+\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}}(0,k) = \sqrt{2}(A_0 + B_0) \qquad Es_{2p+\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}}{}'(0,k) = \frac{\sqrt{1-k^2}}{\sqrt{2}}(A_0 - B_0) \right.$$

$$2\nu = 4p-1 \quad et \quad p \in \mathbf{N} \rightarrow \left\{ Ec_{2p-\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}}(0,k) = \sqrt{2}(C_0 + D_0) \qquad Es_{2p-\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}}{}'(0,k) = \frac{\sqrt{1-k^2}}{\sqrt{2}}(A_0 - B_0) \right.$$

Pour le développement d'ordre général d'une fonction de période 8K, il vient :

$$2\nu = 4p+1 \Rightarrow A_{-r} = 0 \quad pour \quad r > p \Rightarrow \begin{cases} y^+(z) = \sum_{r=-\infty}^{r=+p} A_{-r} Cos\left(\left(\frac{4r+1}{2}\right) am(z,k)\right) \\ y^-{}'(z) = \sum_{r=-\infty}^{r=+p} A_{-r}\left(\frac{4r+1}{2}\right) dn(z,k) Cos\left(\left(\frac{4r+1}{2}\right) am(z,k)\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow y^+(0) = \sum_{r=-\infty}^{r=+p} A_{-r} \qquad y^-{}'(0) = \sum_{r=-\infty}^{r=+p} A_{-r}\left(\frac{4r-1}{2}\right)$$

$$2\nu = 4p-1 \Rightarrow A_r = 0 \quad pour \quad r > p \Rightarrow \begin{cases} y^+(z) = \sum_{r=-\infty}^{r=+p} A_r Cos\left(\left(\frac{4r-1}{2}\right) am(z,k)\right) \\ y^-{}'(z) = \sum_{r=-\infty}^{r=+p} A_r\left(\frac{4r-1}{2}\right) dn(z,k) Cos\left(\left(\frac{4r-1}{2}\right) am(z,k)\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow y^+(0) = \sum_{r=-\infty}^{r=+p} A_r \qquad y^-{}'(0) = \sum_{r=-\infty}^{r=+p} A_r\left(\frac{4r-1}{2}\right)$$

<u>Tableau de quelques valeurs propres données par E.L.Ince dans l'article « Further Investigations into the Periodic Lame Functions »</u>

$k^2=0.1$						
(1) 2v=4p+1 (2) 2v=4p-1	m=0	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5
v=½ p=0 (1)	0.275					
v=1+½ p=1 (2)	0.42106079858305445	2.3289392014169454				
v=2+½ p=1 (1)	0.6472914746853224	2.5983168305965796	6.379391694718099			
v=3+½ p=2 (2)	0.9302172603145321	2.9944478321576793	6.744804141786673	12.430530765741116		
v=4+½ p=2 (1)	1.244338356787583	3.5278229121586446	7.223936253789767	12.897130559805731	20.48177191745825	
v=5+½ p=3 (2)	1.5699630131322837	4.198309086712625	7.824381591160397	13.473901728975493	21.05039787094237	30.533046709076885
$k^2=0.5$						
(1) 2v=4p+1 (2) 2v=4p-1	m=0	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5
v=½ p=0 (1)	0.375					
v=1+½ p=1 (2)	1.0089745962155616	2.741025403784439				
v=2+½ p=1 (1)	1.729248688935409	4.375000000000002	7.020751311064587			
v=3+½ p=2 (2)	2.4438189972283633	6.459983068959071	9.290016931040922	13.306181002771634		
v=4+½ p=2 (1)	3.153928595494932	8.637107257689303	12.375000000000018	16.11289274231069	21.596071404505036	
v=5+½ p=3 (2)	3.8625805199677554	10.790225968477847	15.949363160436986	19.800636839563033	24.959774031522144	31.887419480032236
$k^2=0.9$						
(1) 2v=4p+1 (2) 2v=4p-1	m=0	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5
v=½ p=0 (1)	0.475					
v=1+½ p=1 (2)	1.4210607985830541	3.3289392014169454				
v=2+½ p=1 (1)	2.3706083052819023	6.151683169403421	8.102708525314677			
v=3+½ p=2 (2)	3.3194692342588836	9.005195858213323	12.75555216784232	14.819782739685467		
v=4+½ p=2 (1)	4.268228082541713	11.852869440194286	17.52606374621024	21.222177087841267	23.50566164321249	
v=5+½ p=3 (2)	5.2169532909231044	14.699602129057682	22.27609827102451	27.925618408839664	31.551690913287405	34.18003698686772

Exemples de valeurs propres et de fonctions périodiques de Lamé de période 8K (algébriques)

Voici les premières fonctions de Lamé algébriques qui possède des valeurs caractéristiques h simples :

$$2\nu=4p+1 \quad p=0 \quad \nu=\frac{1}{2} \quad h=\frac{1}{4}\left(1+k^2\right) \quad m=0\rightarrow Ec_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(z,k)=\sqrt{dn(z,k)+cn(z,k)} \quad Es_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(z,k)=\sqrt{dn(z,k)-cn(z,k)}$$

$$2\nu=4p-1 \quad p=1 \quad \nu=\frac{1}{2} \quad h=\frac{5}{4}\left(1+k^2\right)-\sqrt{1-k^2+k^4} \quad m=0\rightarrow\begin{cases} Ec_{\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}}=\sqrt{dn(z,k)+cn(z,k)}\left\{dn(z,k)-\left(1-k^2-\sqrt{1-k^2+k^4}\right)cn(z,k)\right\} \\ Es_{\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}}=\sqrt{dn(z,k)-cn(z,k)}\left\{dn(z,k)+\left(1-k^2-\sqrt{1-k^2+k^4}\right)cn(z,k)\right\}\end{cases}$$

$$2\nu=4p-1 \quad p=1 \quad \nu=\frac{1}{2} \quad h=\frac{5}{4}\left(1+k^2\right)+\sqrt{1-k^2+k^4} \quad m=1\rightarrow\begin{cases} Ec_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}}=\sqrt{dn(z,k)+cn(z,k)}\left\{dn(z,k)-\left(1-k^2+\sqrt{1-k^2+k^4}\right)cn(z,k)\right\} \\ Es_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}}=\sqrt{dn(z,k)-cn(z,k)}\left\{dn(z,k)+\left(1-k^2+\sqrt{1-k^2+k^4}\right)cn(z,k)\right\}\end{cases}$$

Les autres valeurs propres h ne possèdent pas de valeurs algébriques (racines d'un polynôme de degré supérieur).

On peut aller plus dans l'expression pour la valeur particulière du paramètre k : $k^2=\frac{1}{2}$*, pour lequel E.L.Ince a également proposé une conjecture sur la valeur propre pour la valeur m=p, soit :*

$$k^2=\frac{1}{2} \quad 2\nu=4p+1 \quad \nu=\frac{4p+1}{2} \quad m=p \quad h=\frac{(4p+1)(4p+3)}{8}$$

$$p=0 \quad \nu=\frac{1}{2} \quad h=\frac{3}{8}\rightarrow Ec_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=\sqrt{dn(z,k)+cn(z,k)} \quad Es_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=\sqrt{dn(z,k)-cn(z,k)}$$

$$p=1 \quad \nu=\frac{5}{2} \quad h=\frac{35}{8}\rightarrow\begin{cases} Ec_{\frac{5}{2}}^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{7}\sqrt{dn(z,k)+cn(z,k)}\left(7-4sn^2(z,k)-8\,cn(z,k)dn(z,k)\right) \\ Es_{\frac{5}{2}}^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{7}\sqrt{dn(z,k)-cn(z,k)}\left(7-4sn^2(z,k)+8\,cn(z,k)dn(z,k)\right)\end{cases}$$

$$p=2 \quad \nu=\frac{9}{2} \quad h=\frac{99}{8}\rightarrow\begin{cases} Ec_{\frac{9}{2}}^{\frac{5}{2}}=\frac{1}{13}\sqrt{dn(z,k)+cn(z,k)}\left(13-36\,sn^2(z,k)+16sn^4(z,k)-8\,cn(z,k)dn(z,k)\right) \\ Es_{\frac{9}{2}}^{\frac{5}{2}}=\frac{1}{13}\sqrt{dn(z,k)-cn(z,k)}\left(13-36\,sn^2(z,k)+16sn^4(z,k)+8\,cn(z,k)dn(z,k)\right)\end{cases}$$

$$p=3 \quad \nu=\frac{13}{2} \quad h=\frac{195}{8}\rightarrow\begin{cases} Ec_{\frac{13}{2}}^{\frac{7}{2}}=\frac{1}{347}\sqrt{dn(z,k)+cn(z,k)}\begin{pmatrix}347-1304\,sn^2(z,k)+1200\,sn^4(z,k)-320\,sn^6(z,k)- \\ -16\,cn(z,k)dn(z,k)\left\{23-80\,sn^2(z,k)+40\,sn^4(z,k)\right\}\end{pmatrix} \\ Es_{\frac{13}{2}}^{\frac{7}{2}}=\frac{1}{347}\sqrt{dn(z,k)-cn(z,k)}\begin{pmatrix}347-1304\,sn^2(z,k)+1200\,sn^4(z,k)-320\,sn^6(z,k)+ \\ +16\,cn(z,k)dn(z,k)\left\{23-80\,sn^2(z,k)+40\,sn^4(z,k)\right\}\end{pmatrix}\end{cases}$$

Cette conjecture a été prouvée par A.Erdelyi, dans l'article de 1941 « XXVIII, On Algebraic Lamé Functions ».

Dans ce cas de figure la récurrence s'écrit :

$$2\nu = 4p+1 \Rightarrow p = \frac{2\nu-1}{4} \quad h = \frac{(4p+1)(4p+3)}{8} \quad H = h - \frac{3}{8} = 2p(p+1)$$

$$r \geq 0 \quad \begin{cases} A_{-1} = B_{-1} = 0 \\ A_0 = 1 \\ \begin{cases} (2r+2)^2 A_{r+1} + \{2p(p+1) - 3r(2r+1)\}A_r - 2(p-r+1)(p+r)A_{r-1} - (2r+2)B_{r+1} + (2r+1)\frac{3}{2}B_r - rB_{r-1} = 0 \\ (2r+2)^2 B_{r+1} + \left\{2p(p+1) - (2r+1)(2r+2)\frac{3}{2}\right\}B_r - 2(p-r)(p+r+1)B_{r-1} - (2r+2)A_{r+1} = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2(2r+2)^2 A_{r+1} + 2\{2p(p+1) - 3r(2r+1)\}A_r - 4(p-r+1)(p+r)A_{r-1} - 2(2r+2)B_{r+1} + 3(2r+1)B_r - 2rB_{r-1} = 0 \\ 2(2r+2)^2 B_{r+1} + \{4p(p+1) - 3(2r+1)(2r+2)\}B_r - 4(p-r)(p+r+1)B_{r-1} - 2(2r+2)A_{r+1} = 0 \end{cases} \\ \text{Développement fini} \quad \forall r \geq p \quad B_r = 0 \quad \text{et} \quad \forall r \geq p+1 \quad A_r = 0 \end{cases}$$

$$2(2r+2)^2 A_{r+1} = 2(2r+2)^3 B_{r+1} + \{4p(p+1) - 3(2r+1)(2r+2)\}(2r+2)B_r - 4(p-r)(p+r+1)(2r+2)B_{r-1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\{2p(p+1) - 3r(2r+1)\}A_r - 4(p-r+1)(p+r)A_{r-1} \\ +2(2r+1)(2r+2)(2r+3)B_{r+1} \\ +\left[4p(p+1)(2r+2) - 3(2r+1)^2(2r+3)\right]B_r \\ -2[r + 2(p-r)(p+r+1)(2r+2)]B_{r-1} = 0 \end{cases}$$

Mais je ne suis pas arrivé à la simplifier , afin d'avoir une expression simple des coefficients du développement.

<u>*Fonctions périodiques de Lamé de période 4sK*</u>

Dans ce cas la période est un multiple de 4K. E.L.Ince construit également les fonctions périodiques paires en utilisant le développement suivant :

$$\begin{cases} y_s(z,k) = \sum_{r=-\infty}^{r=+\infty} A_r Cos((2r-\theta)am(z,k)) \qquad \theta = \frac{p}{s} \qquad p \quad \text{et} \quad s \quad \text{sont premiers entre-eux} \\ \eta = 2h - \nu(\nu+1)k^2 \\ \frac{1}{2}(\nu - \theta + 2r + 2)(\nu + \theta - 2r - 1)k^2 A_{r+1} + \left(\eta - (2r-\theta)^2(2-k^2)\right)A_r + \frac{1}{2}(\nu - \theta + 2r - 1)(\nu + \theta - 2r + 2)k^2 A_{r-1} = 0 \end{cases}$$

La récurrence à trois termes est équivalente à un système linéaire bilatéral dont la matrice est tri-diagonale. Là encore le développement est valide dès lors que h (ou η) est une valeur propre de cette matrice tri-diagonale. Une approximation du système linéaire consiste à tronquer des deux cotés la matrice à une taille donnée et de résoudre le problème aux valeurs propres, en ordonnant ces dernières de manière croissante. Les coefficients sont les coordonnées du vecteur propres associés, dont on peut par exemple choisir comme normalisation que le terme central A_0 soit égal à 1 :

$$\begin{cases} \theta = \dfrac{p}{s} \quad p \ \ et \ \ s \ \ sont\ premiers\ entre-eux \quad \eta = 2h - \nu(\nu+1)k^2 \\ -\dfrac{1}{2}(\nu-\theta+2r+2)(\nu+\theta-2r-1)k^2 A_{r+1} + (2r-\theta)^2(2-k^2)A_r - \dfrac{1}{2}(\nu-\theta+2r-1)(\nu+\theta-2r+2)k^2 A_{r-1} = \eta\, A_r \\ \Leftrightarrow \alpha_r A_{r+1} + \beta_r A_r + \gamma_r A_{r-1} = \eta\, A_r \\ \alpha_r = -\dfrac{1}{2}(\nu-\theta+2r+2)(\nu+\theta-2r-1)k^2 \\ \beta_r = (2r-\theta)^2(2-k^2) \\ \gamma_r = -\dfrac{1}{2}(\nu-\theta+2r-1)(\nu+\theta-2r+2)k^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{A}_\infty = [\dots \ A_{-n} \ \dots \ A_{-1} \ A_0 \ A_1 \ \dots \ A_n \ \dots] \quad \mathbf{M}_\infty.\mathbf{A}_\infty = \eta\,\mathbf{A}_\infty$$

$$\approx \mathbf{A}_{2n+1} = [A_{-n} \ A_{-n+1} \ \dots \ A_{-1} \ A_0 \ A_1 \ \dots \ A_{n-1} \ A_n] \quad \mathbf{M}_{2n+1}.\mathbf{A}_{2n+1} = \eta\,\mathbf{A}_{2n+1}$$

$$\mathbf{M}_{2n+1} = \begin{bmatrix} \beta_{-n} & \alpha_{-n} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \gamma_{-n+1} & \beta_{-n+1} & \alpha_{-n+1} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \gamma_{-1} & \beta_{-1} & \alpha_{-1} & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & \gamma_0 & \beta_0 & \alpha_0 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \gamma_1 & \beta_1 & \alpha_1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \gamma_{n-1} & \beta_{n-1} & \alpha_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \gamma_n & \beta_n \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} \lambda \quad valeur\ propre \\ \mathbf{A}_{2n+1} \quad vecteur\ propre \end{matrix}\right\} de\ \mathbf{M}_{2n+1} \Leftrightarrow h = \frac{\lambda + 4\nu(\nu+1)k^2}{2}$$

A partir de cette construction on en déduit les deux types de développement paire et impaire, solution de même valeur propre h et linéairement indépendante :

$$y^+(z) = \sum_{r=-\infty}^{r=+\infty} A_r Cos\left(\left(2r - \frac{p}{s}\right) am(z,k)\right) \quad y^-(z) = \sum_{r=-\infty}^{r=+\infty} A_r Sin\left(\left(2r - \frac{p}{s}\right) am(z,k)\right)$$

Il existe alors deux solutions spécifiques de période 4sk pour lequel le développement bilatéral est simplifié, à savoir les valeurs telles que : $\nu = \frac{p}{s} \quad ou \quad \nu = -\frac{p}{s} - 1$

Pour ses valeurs respectives, on peut montrer par la récurrence que le développement est unilatéral à savoir :

$$\nu = \frac{p}{s} \Rightarrow A_r = 0 \quad pour \quad r < 0 \Rightarrow y^+(z) = \sum_{r=0}^{r=+\infty} A_r Cos\left(\left(2r - \frac{p}{s}\right) am(z,k)\right)$$
$$\nu = -\frac{p}{s} - 1 \Rightarrow B_r = 0 \quad pour \quad r < 0 \Rightarrow y^+(z) = \sum_{r=0}^{r=+\infty} B_r Cos\left(\left(2r + \frac{p}{s} + 1\right) am(z,k)\right)$$

La récurrence sur les termes du premier développement pour $\nu = \frac{p}{s}$ *est alors la suivante :*

$$\begin{cases} \nu = \theta = \frac{p}{s} \qquad p \quad et \quad s \quad sont\ premiers\ entre-eux \qquad \eta = 2h - \nu(\nu+1)k^2 \\ -(r+1)(2\theta - 2r - 1)k^2 A_{r+1} + (2r-\theta)^2 (2-k^2) A_r - (2r-1)(\theta - r + 1)k^2 A_{r-1} = \eta\ A_r \\ \Leftrightarrow \alpha_r A_{r+1} + \beta_r A_r + \gamma_r A_{r-1} = \eta\ A_r \\ \alpha_r = (r+1)(2r+1-2\theta)k^2 \\ \beta_r = (2r-\theta)^2(2-k^2) \\ \gamma_r = (2r-1)(r-1-\theta)k^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{A}_\infty = [A_0 \quad A_1 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad A_n \quad \ldots] \quad \mathbf{M}_\infty.\mathbf{A}_\infty = \eta\ \mathbf{A}_\infty$$
$$\approx \mathbf{A}_{n+1} = [A_0 \quad A_1 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad A_{n-1} \quad A_n] \quad \mathbf{M}_{n+1}.\mathbf{A}_{n+1} = \eta\ \mathbf{A}_{n+1}$$

$$\mathbf{M}_{n+1} = \begin{bmatrix} \beta_0 & \alpha_0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \gamma_1 & \beta_1 & \alpha_1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \gamma_{n-1} & \beta_{n-1} & \alpha_{n-1} \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \gamma_n & \beta_n \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} \lambda \quad valeur\ propre \\ \mathbf{A}_{n+1} \quad vecteur\ propre \end{matrix}\right\} de\ \mathbf{M}_{n+1} \Leftrightarrow h = \frac{\lambda + 4\nu(\nu+1)k^2}{2}$$

La récurrence sur les termes du deuxième développement pour $\nu=-\frac{p}{s}-1$ *est alors la suivante :*

$$\begin{cases}\nu=-\theta-1=-\frac{p}{s}-1 \quad p \ \ et \ \ s \ \ sont\ premiers\ entre-eux \quad \eta=2h-\nu(\nu+1)k^2\\ (2r+1-2\theta)(r+1)k^2B_{r+1}+(2r-\theta)^2\left(2-k^2\right)B_r+(-\theta+r-1)(2r-1)k^2B_{r-1}=\eta\, B_r\\ \Leftrightarrow \alpha_r B_{r+1}+\beta_r B_r+\gamma_r B_{r-1}=\eta\, B_r\\ \alpha_r=(2r+1-2\theta)(r+1)k^2\\ \beta_r=(2r-\theta)^2\left(2-k^2\right)\\ \gamma_r=(r-1-\theta)(2r-1)k^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{B}_\infty=\begin{bmatrix}B_0 & B_1 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & B_n & \ldots\end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_\infty.\mathbf{B}_\infty=\eta\,\mathbf{B}_\infty$$

$$\approx \mathbf{B}_{n+1}=\begin{bmatrix}B_0 & B_1 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & B_{n-1} & B_n\end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_{n+1}.\mathbf{B}_{n+1}=\eta\,\mathbf{B}_{n+1}$$

$$\mathbf{M}_{n+1}=\begin{bmatrix}\beta_0 & \alpha_0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0\\ \gamma_1 & \beta_1 & \alpha_1 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \ldots & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \gamma_{n-1} & \beta_{n-1} & \alpha_{n-1}\\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \gamma_n & \beta_n\end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix}\lambda \quad valeur\ propre\\ \mathbf{B}_{n+1} \quad vecteur\ propre\end{matrix}\right\}de\ \mathbf{M}_{n+1}\Leftrightarrow h=\frac{\lambda+4\nu(\nu+1)k^2}{2}$$

Les fonctions impaires sont linéairement indépendantes et construites ainsi :

$$\nu=\frac{p}{s}\Rightarrow A_r=0 \quad pour \quad r<0\Rightarrow y^-(z)=\sum_{r=0}^{r=+\infty}A_r Sin\left(\left(2r-\frac{p}{s}\right)am(z,k)\right)$$

$$\nu=-\frac{p}{s}-1\Rightarrow B_r=0 \quad pour \quad r<0\Rightarrow y^-(z)=\sum_{r=0}^{r=+\infty}B_r Sin\left(\left(2r+\frac{p}{s}+1\right)am(z,k)\right)$$

Développement de Fröbenius des solutions de l'équation Lamé autour de la singularité 0

Les solutions précédentes sont toutes utiles pour la résolution de problèmes aux limites et certaines correspondent à des fonctions propres d'un problème de Sturm-Liouville aux conditions aux limites homogènes sur un intervalle (celui de la période par exemple). En cela ces fonctions sont utiles pour la résolution des problèmes stationnaires de chaleur ou d'électrostatique, lorsque la géométrie du système de coordonnées conduit à des équations de Lamé, et la résolution s'effectue sur un intervalle comportant au moins deux singularités de l'équation de Lamé.

Dans la plupart de ces problèmes, qui sont souvent à deux dimensions, par la méthode de séparation la fonction de la deuxième variable n'a besoin d'être défini que sur un intervalle restreint qui ne comporte qu'une seule singularité. Dans ce cas le formalisme des développement de Fröbenius est suffisant pour construire une solution. Et comme les fonctions de Lamé sont un cas particulier de l'équation de Heun, quoi de plus « simple » que d'utiliser les fonctions de Heun locale à chacune des singularités respectives (ces dernières sont en effet directement des développements de Fröbenius).

Pour illustrer, voici les deux équations séparées du premier problème électrostatique sur une iso-surface du système de coordonnées d'E.G.C.Poole de l'anneau aplati (Flat-Ring) :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2H(\mu)}{d\mu^2} + \left\{\lambda - \left(m^2 - \dfrac{1}{4}\right)\alpha^2 sn^2(\mu,\alpha)\right\}H(\mu) = 0 \\ \tilde{\nu} = i\nu \rightarrow \dfrac{d^2\Theta(\tilde{\nu})}{d\tilde{\nu}^2} + \left\{\lambda - \left(m^2 - \dfrac{1}{4}\right)\alpha^2 sn^2(\tilde{\nu},\alpha)\right\}\Theta(\nu) = 0 \quad avec \quad sn^2(\tilde{\nu},\alpha) = -\dfrac{sn^2(\nu,\beta)}{cn^2(\nu,\beta)} \end{cases}$$

Dans le problème électrostatique de l'iso-surface $\mu = \mu_0$ porté à un potentiel donné, les bornes du domaine sont alors : $\mu \in [0,\mu_0] \quad et \quad \nu \in [-K(\beta),K(\beta)]$*. Dans le problème électrostatique de l'isosurface $\nu = \nu_0$ porté à un potentiel donné, les bornes du domaine sont alors :* $\mu \in [0,2K(\alpha)] \quad et \quad \nu \in [-K(\beta),-\nu_0] \cup [\nu_0,K(\beta)]$*. On voit donc que dans l'un ou l'autre problème, il y a toujours un système de fonctions propres devant être définie et régulière aux deux bornes singulières de l'équation de Lamé, tandis que la fonction de la seconde variable ne doit être régulière que sur une seule borne singulière.*

Dans le premier problème le point singulier est 0, et dans le second le point singulier de l'équation de Lamé est l'infini, car le point iK(β) correspond au point singulier infini lorsque l'équation est mise sous forme algébrique.

La forme algébrique de l'équation de Lamé avec identification des paramètres spécifique de l'équation de Heun permet de construire « facilement » la solution de Fröbenius dans les deux cas :

$$\frac{d^2y(z)}{dz^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z-1}+\frac{\alpha^2}{\alpha^2 z-1}\right)\frac{dy(z)}{dz}+\frac{4h-\alpha^2(4m^2-1)z}{16z(z-1)(\alpha^2 z-1)}y(z)=0$$

Selon la notation des fonctions de Heun, notamment pour commencer, celle locale au point singulier z=0 :

$$\begin{cases} Fonction\ de\ Heun \quad HeunG_l(a,q;\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta},\gamma,\delta;z) \\ a=\frac{1}{\alpha^2} \quad q=-\frac{h}{4\alpha^2} \quad \widetilde{\alpha}=\frac{1-2m}{4} \quad \widetilde{\beta}=\frac{2m+1}{4} \quad \gamma=\delta=\varepsilon=\frac{1}{2}\rightarrow\widetilde{\alpha}+\widetilde{\beta}+1=\gamma+\delta+\varepsilon=\frac{3}{2} \end{cases}$$

Selon l'exposé très détaillé des 192 solutions de l'équation de Heun, par R.S.Maier en 2006, « The 192 Solutions of the Heun Equation », pages 15 et 16, on peut établir les deux solutions locales régulières en 0, qui donne donc la solution de l'équation de Lamé sur l'intervalle μ €$[0,\mu_0]$ lorsque $\mu_0< K(\alpha)$:

$$\frac{d^2H(\mu)}{d\mu^2}+\left\{\lambda-\left(m^2-\frac{1}{4}\right)\alpha^2 sn^2(\mu,\alpha)\right\}H(\mu)=0 \qquad avec \qquad \mu\in[0,\mu_0]$$

$$H_1(\mu)=HeunG_l\left(\frac{1}{\alpha^2},-\frac{h}{4\alpha^2};\frac{1-2m}{4},\frac{2m+1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{2};sn^2(\mu,\alpha)\right)\Rightarrow H_1(0)\neq 0 \quad et \quad H_1'(0)=0$$

$$H_2(\mu)=sn(\mu,\alpha)HeunG_l\left(\frac{1}{\alpha^2},\frac{1+\alpha^2-h}{4\alpha^2};\frac{3-2m}{4},\frac{2m+3}{4},\frac{3}{2},\frac{1}{2};sn^2(\mu,\alpha)\right)\Rightarrow H_2(0)=0 \quad et \quad H_2'(0)\neq 0$$

Dans d'autres problèmes aux limites extérieurs, μ est dans l'intervalle μ€$[\mu_0,2K(\alpha)]$, si $\mu_0>K(\alpha)$ alors l'expression du développement est le même du fait de la parité de la fonction elliptique de Jacobi par rapport au point $\mu=K(\alpha)$:

$$\frac{d^2H(\mu)}{d\mu^2}+\left\{\lambda-\left(m^2-\frac{1}{4}\right)\alpha^2 sn^2(\mu,\alpha)\right\}H(\mu)=0 \qquad avec \qquad \mu\in[\mu_0,2K(\alpha)]$$

$$sn^2(\mu,\alpha)=sn^2(2K(\alpha)-\mu,\alpha)\Rightarrow\begin{cases} H_1(\mu)=HeunG_l\left(\frac{1}{\alpha^2},-\frac{h}{4\alpha^2};\frac{1-2m}{4},\frac{2m+1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{2};sn^2(\mu,\alpha)\right)\Rightarrow H_1(0)\neq 0 \quad et \quad H_1'(0)=0 \\ H_2(\mu)=sn(\mu,\alpha)HeunG_l\left(\frac{1}{\alpha^2},\frac{1+\alpha^2-h}{4\alpha^2};\frac{3-2m}{4},\frac{2m+3}{4},\frac{3}{2},\frac{1}{2};sn^2(\mu,\alpha)\right)\Rightarrow H_2(0)=0 \quad et \quad H_2'(0)\neq 0 \end{cases}$$

Les récurrences de ces deux développements autour soit de 0 soit de 2 K(α) s'écrivent alors comme suit lorsque l'on se réduit uniquement au cas m=0 : (elles sont plus efficaces que d'avoir recours aux fonctions de Heun implémentées sous Mathematica) :

$$\begin{cases} H_1(0)\neq 0 \quad et \quad H_1'(0)=0 \\ H_1(\mu)=HeunG_l\left(\frac{1}{\alpha^2},-\frac{h}{4\alpha^2};\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{2};sn^2(\mu,\alpha)\right)=\sum_{n=0}^{n=+\infty}A_n sn^{2n}(\mu,\alpha) \\ A_0=1 \quad A_1=-\frac{h}{2}A_0 \quad A_{n+1}=-\frac{4\left(h-4n^2\left(1+\alpha^2\right)\right)A_n+(3-4n)^2\alpha^2A_{n-1}}{8(n+1)(2n+1)} \\ H_2(0)=0 \quad et \quad H_2'(0)\neq 0 \\ H_2(\mu)=sn(\mu,\alpha)HeunG_l\left(\frac{1}{\alpha^2},\frac{1+\alpha^2-h}{4\alpha^2};\frac{3}{4},\frac{3}{4},\frac{3}{2},\frac{1}{2};sn^2(\mu,\alpha)\right)=sn(\mu,\alpha)\sum_{n=0}^{n=+\infty}B_n sn^{2n}(\mu,\alpha) \\ B_0=1 \quad B_1=\frac{1-h+\alpha^2}{6}B_0 \quad B_{n+1}=\frac{4\left((2n+1)^2\left(1+\alpha^2\right)-h\right)B_n-(1-4n)^2\alpha^2B_{n-1}}{8(n+1)(2n+3)} \end{cases}$$

En revanche pour les deux cas $\mu€[0,\mu_0]$ lorsque $\mu_0 > K(\alpha)$, ou $\mu€[\mu_0,2K(\alpha)]$ si $\mu_0 < K(\alpha)$, pour l'instant je n'ai pas trouvé de développement de Fröbenius convergeant car l'intervalle contient au moins deux points singuliers de l' équation de Lamé. Par contre dans ce qui suit, je propose une construction approchée d'après des fonctions sinusoïdales hyperboliques.

<u>Construction des solutions de l'équation de Lamé sur un intervalle $[0,x_0]$ avec $x_0 > K(\alpha)$, monotone croissante ou décroissante</u>

Si l'on résume le problème de la fonction de la deuxième variable, cela revient à trouver la solution de l'équation de Lamé :

$$y''(x)+\left(h-\nu(\nu+1)\alpha^2 sn^2(x,\alpha)\right)y(x)=0$$
$$x\in[0,x_0] \quad avec \quad x_0>K(\alpha) \quad et \quad y'(x)\geq 0 \quad et \quad \begin{cases} y(0)=0 \\ y(x_0)=1 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} y'(0)=0 \\ y(x_0)=1 \end{cases}$$

ou le problème équivalent :

$$y''(x)+\left(h-\nu(\nu+1)\alpha^2 sn^2(x,\alpha)\right)y(x)=0$$
$$x\in[x_0,2K(\alpha)] \quad avec \quad x_0<K(\alpha) \quad et \quad y'(x)\leq 0 \quad et \quad \begin{cases} y(0)=0 \\ y(x_0)=1 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} y'(0)=0 \\ y(x_0)=1 \end{cases}$$

Dans le cas du premier problème lorsque x_0 est inférieur à K(α) ou pour le deuxième problème si x_0 est inférieur à K(α), on a vu que les récurrences des deux développements de Fröbenius conviennent autour soit de 0 soit de 2 K(α). Il s'agit des développements des fonctions de Heun. Il s'écrivent alors comme suit :

$$\begin{cases} H_1(0)\neq 0 \quad et \quad H_1'(0)=0 \quad et \quad H_1(x_0)=1 \\ H_1(x)=\dfrac{HeunG_l\left(\frac{1}{\alpha^2},-\frac{h}{4\alpha^2};-\frac{\nu}{2},\frac{\nu+1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2};sn^2(x,\alpha)\right)}{HeunG_l\left(\frac{1}{\alpha^2},-\frac{h}{4\alpha^2};-\frac{\nu}{2},\frac{\nu+1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2};sn^2(x_0,\alpha)\right)}=\dfrac{\sum_{n=0}^{n=+\infty}A_n sn^{2n}(x,\alpha)}{\sum_{n=0}^{n=+\infty}A_n sn^{2n}(x_0,\alpha)} \\ A_0=1 \quad A_1=-\frac{h}{2}A_0 \quad A_{n+1}=\dfrac{\left(4n^2(1+\alpha^2)-h\right)A_n+\left(\nu(\nu+1)-2(2n-1)(n-1)\right)\alpha^2 A_{n-1}}{2(n+1)(2n+1)} \\ H_2(0)=0 \quad et \quad H_2'(0)\neq 0 \quad et \quad H_2(x_0)=1 \\ H_2(\mu)=\dfrac{sn(x,\alpha)HeunG_l\left(\frac{1}{\alpha^2},\frac{1+\alpha^2-h}{4\alpha^2};\frac{1-\nu}{2},\frac{\nu+2}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2};sn^2(x,\alpha)\right)}{sn(x_0,\alpha)HeunG_l\left(\frac{1}{\alpha^2},\frac{1+\alpha^2-h}{4\alpha^2};\frac{1-\nu}{2},\frac{\nu+2}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2};sn^2(x_0,\alpha)\right)}=\dfrac{sn(x,\alpha)\sum_{n=0}^{n=+\infty}B_n sn^{2n}(x,\alpha)}{sn(x_0,\alpha)\sum_{n=0}^{n=+\infty}B_n sn^{2n}(x_0,\alpha)} \\ B_0=1 \quad B_1=\frac{1-h+\alpha^2}{6}B_0 \quad B_{n+1}=\dfrac{\left((2n+1)^2(1+\alpha^2)-h\right)B_n+\left(\nu(\nu+1)-2n(2n-1)\right)\alpha^2 B_{n-1}}{2(n+1)(2n+3)} \end{cases}$$

Mais ces développements pour les deux cas µ€[0,μ_0] lorsque μ_0 > K(α), ou µ€[μ_0,2K(α)] si μ_0 <K(α), ne sont pas valables, car l'intervalle comprend une singularité de l'équation de Lamé.

*Ici, je propose une méthode de résolution approchée des deux problèmes, sachant que le paramètre ν est toujours supérieur ou égal à -1/2 et que les valeurs propres h sont toutes négatives et rapidement de grande valeur, **par exemple dans le cas de la résolution du problème de Sturm-Liouville pour la détermination du potentiel électrostatique sur l'iso-surface µ=Cste du système de coordonnées « Flat-ring d'E.G.C.Poole »***

De plus les valeurs propres h sont croissantes en valeurs et deviennent vite plus importante en valeur que le terme jacobien. Dans ce cas on voit vite que l'équation de lamé est alors très proche de l'équation d'un sinus hyperbolique, forme effectivement obtenue par la résolution numérique des problèmes différentiels :

$$h=-\lambda<0 \qquad \lambda >> \nu(\nu+1)\alpha^2 sn^2(x,\alpha) \qquad y''(x)+\left(h-\nu(\nu+1)\alpha^2 sn^2(x,\alpha)\right)y(x)=0\approx y''(x)-\lambda\, y(x)=0$$

$$\Rightarrow y(x)\approx A Cosh\left(x\sqrt{\lambda+\nu(\nu+1)\alpha^2 sn^2(x_0,\alpha)}\right)+B Sinh\left(x\sqrt{\lambda+\nu(\nu+1)\alpha^2 sn^2(x_0,\alpha)}\right)$$

$$\begin{cases} y(0)=0 \qquad y(x_0)=1 \\ y(x)\approx\dfrac{Sinh\left(x\sqrt{\lambda+\nu(\nu+1)\alpha^2 sn^2(x_0,\alpha)}\right)}{Sinh\left(x_0\sqrt{\lambda+\nu(\nu+1)\alpha^2 sn^2(x_0,\alpha)}\right)} \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} y'(0)=0 \qquad y(x_0)=1 \\ y(x)\approx\dfrac{Cosh\left(x\sqrt{\lambda+\nu(\nu+1)\alpha^2 sn^2(x_0,\alpha)}\right)}{Cosh\left(x_0\sqrt{\lambda+\nu(\nu+1)\alpha^2 sn^2(x_0,\alpha)}\right)} \end{cases}$$

Dans ces conditions proposons la forme suivante des solutions des deux problèmes :

$$y''(x)-\left(\lambda+\nu(\nu+1)\alpha^2 sn^2(x,\alpha)\right)y(x)=0 \qquad \tilde{\lambda}=\lambda+\nu(\nu+1)\alpha^2 sn^2(x_0,\alpha) \quad \begin{cases} y(x)=f(x)g(x) \\ f''(x)-\tilde{\lambda}\, f(x)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(0)=0 \quad y'(0)\neq 0 \qquad y(x_0)=1 \qquad y(x)=\dfrac{Sinh\left(x\sqrt{\tilde{\lambda}}\,x\right)}{Sinh\left(x_0\sqrt{\tilde{\lambda}}\right)}g(x) \\ f(x)=\dfrac{Sinh\left(x\sqrt{\tilde{\lambda}}\,x\right)}{Sinh\left(x_0\sqrt{\tilde{\lambda}}\right)} \qquad f'(x)=\sqrt{\tilde{\lambda}}\,\dfrac{Cosh\left(x\sqrt{\tilde{\lambda}}\right)}{Sinh\left(x_0\sqrt{\tilde{\lambda}}\right)} \\ \dfrac{f'(x)}{f(x)}=\sqrt{\tilde{\lambda}}\,Cotanh\left(\sqrt{\tilde{\lambda}}\,x\right) \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} y'(0)=0 \quad y(0)\neq 0 \quad y(x_0)=1 \qquad y(x)=\dfrac{Cosh\left(x\sqrt{\tilde{\lambda}}\right)}{Cosh\left(x_0\sqrt{\tilde{\lambda}}\right)}g(x) \\ f(x)=\dfrac{Cosh\left(x\sqrt{\tilde{\lambda}}\right)}{Cosh\left(x_0\sqrt{\tilde{\lambda}}\right)} \qquad f'(x)=\sqrt{\tilde{\lambda}}\,\dfrac{Sinh\left(x\sqrt{\tilde{\lambda}}\right)}{Cosh\left(x_0\sqrt{\tilde{\lambda}}\right)} \\ \dfrac{f'(x)}{f(x)}=\sqrt{\tilde{\lambda}}\,Tanh\left(x\sqrt{\tilde{\lambda}}\right) \end{cases}$$

$$y'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \qquad et \qquad y''(x)=f''(x)g(x)+2f'(x)g'(x)+f(x)g''(x)$$

$$\Rightarrow y''(x)-\left(\lambda+\nu(\nu+1)\alpha^2 sn^2(x,\alpha)\right)y(x)=f''(x)g(x)+2f'(x)g'(x)+f(x)g''(x)-\left(\tilde{\lambda}+\nu(\nu+1)\alpha^2\left(sn^2(x,\alpha)-sn^2(x_0,\alpha)\right)\right)f(x)g(x)$$

$$=\left(f''(x)-\tilde{\lambda}\,f(x)\right)g(x)+2f'(x)g'(x)+f(x)g''(x)-\nu(\nu+1)\alpha^2\left(sn^2(x,\alpha)-sn^2(x_0,\alpha)\right)f(x)g(x)$$

$$=f(x)g''(x)+2f'(x)g'(x)-\nu(\nu+1)\alpha^2\left(sn^2(x,\alpha)-sn^2(x_0,\alpha)\right)f(x)g(x)=0 \Leftrightarrow g''(x)+2\frac{f'(x)}{f(x)}g'(x)-\nu(\nu+1)\alpha^2\left(sn^2(x,\alpha)-sn^2(x_0,\alpha)\right)g(x)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g(x_0)=1 \qquad y'(0)=f'(0)g(0)+f(0)g'(0)\neq 0 \Rightarrow g(0)\neq 0 \\ g''(x)+2\sqrt{\tilde{\lambda}}\,Cotanh\left(\sqrt{\tilde{\lambda}}\,x\right)g'(x)-\nu(\nu+1)\alpha^2\left(sn^2(x,\alpha)-sn^2(x_0,\alpha)\right)g(x)=0 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} g(x_0)=1 \qquad y'(0)=f'(0)g(0)+f(0)g'(0)=0 \Rightarrow g'(0)=0 \\ g''(x)+2\sqrt{\tilde{\lambda}}\,Tanh\left(\sqrt{\tilde{\lambda}}\,x\right)g'(x)-\nu(\nu+1)\alpha^2\left(sn^2(x,\alpha)-sn^2(x_0,\alpha)\right)g(x)=0 \end{cases}$$

Je propose d'utiliser maintenant une méthode de perturbation de l'équation différentielle sur la fonction g(x) dont le paramètre de perturbation ε serait $\varepsilon=\dfrac{\nu(\nu+1)\alpha^2}{2\sqrt{\tilde{\lambda}}}$.

Soit l'équation différentielle suivante du problème aux solutions recherchées impaires :

$$\begin{cases} g(x_0)=1 \qquad g(0)\neq 0 \qquad g''(x)+2\sqrt{\tilde{\lambda}}\,Cotanh\left(\sqrt{\tilde{\lambda}}\,x\right)g'(x)-2\sqrt{\tilde{\lambda}}\,\varepsilon\left(sn^2(x,\alpha)-sn^2(x_0,\alpha)\right)g(x)=0 \\ g(x)=g_0(x)+\varepsilon\, g_1(x)+\varepsilon^2\, g_2(x)+\ldots \Rightarrow \begin{cases} g_0(0)\neq 0 \\ g_1(0)\neq 0\ldots \end{cases} \qquad et \qquad \begin{cases} g_0(x_0)=1 \\ 1+\varepsilon\, g_1(x_0)=1 \Rightarrow g_1(x_0)=0 \\ \ldots g_2(x_0)=0\ldots \end{cases} \end{cases}$$

Prenons la première équation différentielle, nous avons pour la première fonction $g_0(x)$:

$$g_0''(x)+2\sqrt{\tilde{\lambda}}\,Cotanh\left(\sqrt{\tilde{\lambda}}\,x\right)g_0'(x)=0 \Rightarrow \frac{d}{dx}Log\left(g_0'(x)\right)=-2\frac{\sqrt{\tilde{\lambda}}\,Cosh\left(\sqrt{\tilde{\lambda}}\,x\right)}{Sinh\left(\sqrt{\tilde{\lambda}}\,x\right)}=-2\frac{d}{dx}Log\left(Sinh\left(\sqrt{\tilde{\lambda}}\,x\right)\right)$$

$$Log\left(g_0'(x)\right)=C_0-2Log\left(Sinh\left(\sqrt{\tilde{\lambda}}\,x\right)\right) \Rightarrow g_0'(x)=\frac{C_1}{Sinh^2\left(\sqrt{\tilde{\lambda}}\,x\right)} \Rightarrow g_0(x)=C_3+C_2Cotanh\left(\sqrt{\tilde{\lambda}}\,x\right) \Rightarrow g_0(x)=1$$

Pour la seconde fonction, l'équation différentielle est la suivante :

$$g_0(x)=1 \Rightarrow g_1''(x)+2\sqrt{\tilde{\lambda}}\,Cotanh\left(\sqrt{\tilde{\lambda}}\,x\right)g_1'(x)=2\sqrt{\tilde{\lambda}}\left(sn^2(x,\alpha)-sn^2(x_0,\alpha)\right)$$

$$\Rightarrow g_1(x)=A+BCotanh\left(\sqrt{\tilde{\lambda}}\,x\right)+solution\ \ particulière$$

Une solution particulière doit être trouvée, mais il se trouve qu'il y a une relative difficulté dans la recherche d'une intégrale particulière. Plutôt que de vainement chercher, j'ai tenté finalement avec un certain succès de développer le second membre autour de la valeur x=x0, cela donne une équation différentielle comme suit :

$$g_1''(x)+2\sqrt{\tilde{\lambda}}\,Cotanh\left(\sqrt{\tilde{\lambda}}\,x\right)g_1'(x)=4\sqrt{\tilde{\lambda}}\,(x-x_0)\,sn(x_0,\alpha)\,cn(x_0,\alpha)\,dn(x_0,\alpha).$$

La solution générale de cette équation est la suivante :

$$g_1(x)=A-B\,Cotanh\left(\sqrt{\tilde{\lambda}}\,x\right)+\frac{sn(x_0,\alpha)\,cn(x_0,\alpha)\,dn(x_0,\alpha)}{2\tilde{\lambda}}\left\{\left(1+2x^2\tilde{\lambda}-4xx_0\tilde{\lambda}\right)Cotanh\left(\sqrt{\tilde{\lambda}}\,x\right)-2x\sqrt{\tilde{\lambda}}\right\}$$

Comme le terme en cotangente hyperbolique doit rester fini, il vient la valeur de B :

$$B=\frac{sn(x_0,\alpha)\,cn(x_0,\alpha)\,dn(x_0,\alpha)}{2\sqrt{\tilde{\lambda}}}$$

Et la fonction doit s'annuler en x=x0 :

$$A=x_0\,\frac{sn(x_0,\alpha)\,cn(x_0,\alpha)\,dn(x_0,\alpha)}{\sqrt{\tilde{\lambda}}}\left\{1+x_0\sqrt{\tilde{\lambda}}\,Cotanh\left(\sqrt{\tilde{\lambda}}\,x_0\right)\right\}$$

D'où la solution de $g_1(x)$:

$$g_1(x)=\frac{sn(x_0,\alpha)\,cn(x_0,\alpha)\,dn(x_0,\alpha)}{\sqrt{\tilde{\lambda}}}\left\{(x-x_0)\left((x-x_0)\sqrt{\tilde{\lambda}}\,Cotanh\left(\sqrt{\tilde{\lambda}}\,x\right)-1\right)+x_0^{\,2}\sqrt{\tilde{\lambda}}\left(Cotanh\left(\sqrt{\tilde{\lambda}}\,x_0\right)-Cotanh\left(\sqrt{\tilde{\lambda}}\,x\right)\right)\right\}.$$

Soit l'équation différentielle suivante du problème aux solutions recherchées paires :

$$\begin{cases} g(x_0)=1 \qquad g'(0)=0 \qquad g''(x)+2\sqrt{\tilde{\lambda}}\,Tanh\left(\sqrt{\tilde{\lambda}}\,x\right)g'(x)-2\sqrt{\tilde{\lambda}}\;\varepsilon\left(sn^2(x,\alpha)-sn^2(x_0,\alpha)\right)g(x)=0 \\ g(x)=g_0(x)+\varepsilon\,g_1(x)+\varepsilon^2\,g_2(x)+\ldots\Rightarrow\begin{cases} g_0'(0)=0 \\ g_1'(0)=0\ldots \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} g_0(x_0)=1 \\ 1+\varepsilon\,g_1(x_0)=1\Rightarrow g_1(x_0)=0 \\ \ldots g_2(x_0)=0\ldots \end{cases} \end{cases}$$

Le traitement de la solution est relativement identique et nous avons d'abord $g_0(x)=1$, puis pour g1(x) en développant le deuxième membre de l'équation différente autour de x_0, il vient :

$$g_1''(x)+2\sqrt{\tilde{\lambda}}\,Tanh\left(\sqrt{\tilde{\lambda}}\,x\right)g_1'(x)=4\sqrt{\tilde{\lambda}}\,(x-x_0)\,sn(x_0,\alpha)\,cn(x_0,\alpha)\,dn(x_0,\alpha).$$

La solution générale de cette équation est la suivante :

$$g_1(x)=A-B\,Tanh\left(\sqrt{\tilde{\lambda}}\,x\right)+\frac{sn(x_0,\alpha)\,cn(x_0,\alpha)\,dn(x_0,\alpha)}{2\tilde{\lambda}}\left\{\left(1+2x^2\tilde{\lambda}-4xx_0\tilde{\lambda}\right)Tanh\left(\sqrt{\tilde{\lambda}}\,x\right)-2x\sqrt{\tilde{\lambda}}\right\}$$

Comme la dérivée première de la fonction g1(x) doit s'annuler, il vient la même valeur de B que précédemment :

$$B=\frac{sn(x_0,\alpha)\,cn(x_0,\alpha)\,dn(x_0,\alpha)}{2\sqrt{\tilde{\lambda}}}$$

Et la fonction doit également s'annuler en $x=x_0$, ce qui permet d'obtenir la valeur de A :

$$A=\frac{sn(x_0,\alpha)cn(x_0,\alpha)dn(x_0,\alpha)}{\tilde{\lambda}}\left\{x_0\sqrt{\tilde{\lambda}}-Tanh\left(\sqrt{\tilde{\lambda}}x_0\right)+x_0^{\,2}\tilde{\lambda}\,Tanh\left(\sqrt{\tilde{\lambda}}x_0\right)\right\}$$

D'où la solution de $g_1(x)$:

$$g_1(x)=\frac{sn(x_0,\alpha)cn(x_0,\alpha)dn(x_0,\alpha)}{\tilde{\lambda}}\left\{\left(Tanh\left(\sqrt{\tilde{\lambda}}x\right)-Tanh\left(\sqrt{\tilde{\lambda}}x_0\right)\right)\left(1-x_0^{\,2}\tilde{\lambda}\right)+\sqrt{\tilde{\lambda}}\,(x-x_0)\left((x-x_0)\sqrt{\tilde{\lambda}}\,Tanh\left(\sqrt{\tilde{\lambda}}x\right)-1\right)\right\}$$

En résumé on aura donc la construction des solutions suivantes, sachant que le développement approché perturbatif est valable quelque soit la valeur de x_0 dans l'intervalle $[0,2K(\alpha)]$.

$$x\in[0,x_0]\quad et\quad x_0<K(\alpha)\rightarrow\begin{cases}H_1(0)\neq 0\quad et\quad H_1'(0)=0\quad et\quad H_1(x_0)=1\\ H_1(x)=\dfrac{HeunG_l\left(\frac{1}{\alpha^2},-\frac{h}{4\alpha^2};-\frac{\nu}{2},\frac{\nu+1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2};sn^2(x,\alpha)\right)}{HeunG_l\left(\frac{1}{\alpha^2},-\frac{h}{4\alpha^2};-\frac{\nu}{2},\frac{\nu+1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2};sn^2(x_0,\alpha)\right)}=\dfrac{\sum_{n=0}^{n=+\infty}A_n sn^{2n}(x,\alpha)}{\sum_{n=0}^{n=+\infty}A_n sn^{2n}(x_0,\alpha)}\\ A_0=1\quad A_1=-\dfrac{h}{2}A_0\quad A_{n+1}=\dfrac{\left(4n^2\left(1+\alpha^2\right)-h\right)A_n+\left(\nu(\nu+1)-2(2n-1)(n-1)\right)\alpha^2A_{n-1}}{2(n+1)(2n+1)}\end{cases}$$

$$x\in[0,x_0]\quad et\quad\begin{cases}x_0\geq K(\alpha)\\ ou\\ x_0<K(\alpha)\end{cases}\rightarrow\begin{cases}H_1(0)\neq 0\quad et\quad H_1'(0)=0\quad et\quad H_1(x_0)=1\qquad \varepsilon=\dfrac{\nu(\nu+1)\alpha^2}{2\sqrt{\tilde{\lambda}}}\qquad \tilde{\lambda}=\lambda+\nu(\nu+1)\alpha^2sn^2(x_0,\alpha)\qquad h=-\lambda<0\\ g_1(x)=\dfrac{sn(x_0,\alpha)cn(x_0,\alpha)dn(x_0,\alpha)}{\tilde{\lambda}}\left\{\left(Tanh\left(\sqrt{\tilde{\lambda}}x\right)-Tanh\left(\sqrt{\tilde{\lambda}}x_0\right)\right)\left(1-x_0^{\,2}\tilde{\lambda}\right)+\sqrt{\tilde{\lambda}}\,(x-x_0)\left((x-x_0)\sqrt{\tilde{\lambda}}\,Tanh\left(\sqrt{\tilde{\lambda}}x\right)-1\right)\right\}\\ H_1(x)\approx\dfrac{Cosh\left(x\sqrt{\lambda+\nu(\nu+1)\alpha^2sn^2(x_0,\alpha)}\right)}{Cosh\left(x_0\sqrt{\lambda+\nu(\nu+1)\alpha^2sn^2(x_0,\alpha)}\right)}\left(1+\varepsilon\,g_1(x)\right)\end{cases}$$

$$x\in[0,x_0]\quad et\quad x_0<K(\alpha)\rightarrow\begin{cases}H_2(0)=0\quad et\quad H_2'(0)\neq 0\quad et\quad H_2(x_0)=1\\ H_2(x)=\dfrac{sn(x,\alpha)HeunG_l\left(\frac{1}{\alpha^2},\frac{1+\alpha^2-h}{4\alpha^2};\frac{1-\nu}{2},\frac{\nu+2}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2};sn^2(x,\alpha)\right)}{sn(x_0,\alpha)HeunG_l\left(\frac{1}{\alpha^2},\frac{1+\alpha^2-h}{4\alpha^2};\frac{1-\nu}{2},\frac{\nu+2}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2};sn^2(x_0,\alpha)\right)}=\dfrac{sn(x,\alpha)\sum_{n=0}^{n=+\infty}B_n sn^{2n}(x,\alpha)}{sn(x_0,\alpha)\sum_{n=0}^{n=+\infty}B_n sn^{2n}(x_0,\alpha)}\\ B_0=1\quad B_1=\dfrac{1-h+\alpha^2}{6}B_0\quad B_{n+1}=\dfrac{\left((2n+1)^2\left(1+\alpha^2\right)-h\right)B_n+\left(\nu(\nu+1)-2n(2n-1)\right)\alpha^2B_{n-1}}{2(n+1)(2n+3)}\end{cases}$$

$$x\in[0,x_0]\quad et\quad\begin{cases}x_0\geq K(\alpha)\\ ou\\ x_0<K(\alpha)\end{cases}\rightarrow\begin{cases}H_2(0)=0\quad et\quad H_2'(0)\neq 0\quad et\quad H_2(x_0)=1\qquad \varepsilon=\dfrac{\nu(\nu+1)\alpha^2}{2\sqrt{\tilde{\lambda}}}\qquad \tilde{\lambda}=\lambda+\nu(\nu+1)\alpha^2sn^2(x_0,\alpha)\qquad h=-\lambda<0\\ g_1(x)=\dfrac{sn(x_0,\alpha)cn(x_0,\alpha)dn(x_0,\alpha)}{\sqrt{\tilde{\lambda}}}\left\{(x-x_0)\left((x-x_0)\sqrt{\tilde{\lambda}}\,Cotanh\left(\sqrt{\tilde{\lambda}}x\right)-1\right)+x_0^{\,2}\sqrt{\tilde{\lambda}}\left(Cotanh\left(\sqrt{\tilde{\lambda}}x_0\right)-Cotanh\left(\sqrt{\tilde{\lambda}}x\right)\right)\right\}\\ H_2(x)\approx\dfrac{Sinh\left(x\sqrt{\lambda+\nu(\nu+1)\alpha^2sn^2(x_0,\alpha)}\right)}{Sinh\left(x_0\sqrt{\lambda+\nu(\nu+1)\alpha^2sn^2(x_0,\alpha)}\right)}\left(1+\varepsilon\,g_1(x)\right)\end{cases}$$

Pour les problèmes sur l'intervalle [x_0,2K(α)], il vient pour les solutions approchées :

$$x \in [x_0, 2K(\alpha)] \quad et \quad \begin{cases} x_0 \geq K(\alpha) \\ ou \\ x_0 < K(\alpha) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} H_1(2K(\alpha)) \neq 0 \quad et \quad H_1'(2K(\alpha)) = 0 \quad et \quad H_1(x_0) = 1 \qquad \varepsilon = \dfrac{\nu(\nu+1)\alpha^2}{2\sqrt{\tilde{\lambda}}} \qquad \tilde{\lambda} = \lambda + \nu(\nu+1)\alpha^2 sn^2(x_0,\alpha) \qquad h = -\lambda < 0 \\ g_1(x,x_0) = \dfrac{sn(x_0,\alpha)cn(x_0,\alpha)dn(x_0,\alpha)}{\tilde{\lambda}} \left\{ \left(Tanh\left(\sqrt{\tilde{\lambda}}\,x\right) - Tanh\left(\sqrt{\tilde{\lambda}}\,x_0\right)\right)\left(1 - x_0^2\tilde{\lambda}\right) + \sqrt{\tilde{\lambda}}\,(x-x_0)\left((x-x_0)\sqrt{\tilde{\lambda}}\,Tanh\left(\sqrt{\tilde{\lambda}}\,x\right) - 1\right) \right\} \\ H_1(x) \approx \dfrac{Cosh\left((2K(\alpha)-x)\sqrt{\lambda + \nu(\nu+1)\alpha^2 sn^2(x_0,\alpha)}\right)}{Cosh\left((2K(\alpha)-x_0)\sqrt{\lambda + \nu(\nu+1)\alpha^2 sn^2(x_0,\alpha)}\right)} \left(1 + \varepsilon\, g_1(2K(\alpha)-x, 2K(\alpha)-x_0)\right) \end{cases}$$

$$x \in [x_0, 2K(\alpha)] \quad et \quad \begin{cases} x_0 \geq K(\alpha) \\ ou \\ x_0 < K(\alpha) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} H_2(2K(\alpha)) = 0 \quad et \quad H_2'(2K(\alpha)) \neq 0 \quad et \quad H_2(x_0) = 1 \qquad \varepsilon = \dfrac{\nu(\nu+1)\alpha^2}{2\sqrt{\tilde{\lambda}}} \qquad \tilde{\lambda} = \lambda + \nu(\nu+1)\alpha^2 sn^2(x_0,\alpha) \qquad h = -\lambda < 0 \\ g_1(x,x_0) = \dfrac{sn(x_0,\alpha)cn(x_0,\alpha)dn(x_0,\alpha)}{\sqrt{\tilde{\lambda}}} \left\{ (x-x_0)\left((x-x_0)\sqrt{\tilde{\lambda}}\,Cotanh\left(\sqrt{\tilde{\lambda}}\,x\right) - 1\right) + x_0^2\sqrt{\tilde{\lambda}}\left(Cotanh\left(\sqrt{\tilde{\lambda}}\,x_0\right) - Cotanh\left(\sqrt{\tilde{\lambda}}\,x\right)\right) \right\} \\ H_2(x) \approx \dfrac{Sinh\left((2K(\alpha)-x)\sqrt{\lambda + \nu(\nu+1)\alpha^2 sn^2(x_0,\alpha)}\right)}{Sinh\left((2K(\alpha)-x_0)\sqrt{\lambda + \nu(\nu+1)\alpha^2 sn^2(x_0,\alpha)}\right)} \left(1 + \varepsilon\, g_1(2K(\alpha)-x, 2K(\alpha)-x_0)\right) \end{cases}$$

Tandis que pour les solutions exactes, nous avons :

$$x \in [x_0, 2K(\alpha)] \quad et \quad x_0 > K(\alpha) \rightarrow \begin{cases} H_1(2K(\alpha)) \neq 0 \quad et \quad H_1'(2K(\alpha)) = 0 \quad et \quad H_1(x_0) = 1 \\ H_1(x) = \dfrac{HeunG_l\left(\dfrac{1}{\alpha^2}, -\dfrac{h}{4\alpha^2}; -\dfrac{\nu}{2}, \dfrac{\nu+1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}; sn^2(x,\alpha)\right)}{HeunG_l\left(\dfrac{1}{\alpha^2}, -\dfrac{h}{4\alpha^2}; -\dfrac{\nu}{2}, \dfrac{\nu+1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}; sn^2(x_0,\alpha)\right)} = \dfrac{\sum_{n=0}^{n=+\infty} A_n sn^{2n}(x,\alpha)}{\sum_{n=0}^{n=+\infty} A_n sn^{2n}(x_0,\alpha)} \\ A_0 = 1 \quad A_1 = -\dfrac{h}{2}A_0 \quad A_{n+1} = \dfrac{\left(4n^2(1+\alpha^2) - h\right)A_n + \left(\nu(\nu+1) - 2(2n-1)(n-1)\right)\alpha^2 A_{n-1}}{2(n+1)(2n+1)} \end{cases}$$

$$x \in [x_0, 2K(\alpha)] \quad et \quad x_0 > K(\alpha) \rightarrow \begin{cases} H_2(2K(\alpha)) = 0 \quad et \quad H_2'(2K(\alpha)) \neq 0 \quad et \quad H_2(x_0) = 1 \\ H_2(x) = \dfrac{sn(x,\alpha)HeunG_l\left(\dfrac{1}{\alpha^2}, \dfrac{1+\alpha^2-h}{4\alpha^2}; \dfrac{1-\nu}{2}, \dfrac{\nu+2}{2}, \dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}; sn^2(x,\alpha)\right)}{sn(x_0,\alpha)HeunG_l\left(\dfrac{1}{\alpha^2}, \dfrac{1+\alpha^2-h}{4\alpha^2}; \dfrac{1-\nu}{2}, \dfrac{\nu+2}{2}, \dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}; sn^2(x_0,\alpha)\right)} = \dfrac{sn(x,\alpha)\sum_{n=0}^{n=+\infty} B_n sn^{2n}(x,\alpha)}{sn(x_0,\alpha)\sum_{n=0}^{n=+\infty} B_n sn^{2n}(x_0,\alpha)} \\ B_0 = 1 \quad B_1 = \dfrac{1-h+\alpha^2}{6}B_0 \quad B_{n+1} = \dfrac{\left((2n+1)^2(1+\alpha^2) - h\right)B_n + \left(\nu(\nu+1) - 2n(2n-1)\right)\alpha^2 B_{n-1}}{2(n+1)(2n+3)} \end{cases}$$

Autres développements de Fröbenius des solutions de l'équation Lamé autour de la singularité 0

Il se trouve que certains problèmes aux limites présentent également la nécessité de développement autour du point singulier 0 pour l'équation différentielles suivantes :

$$\frac{d^2\Theta(\nu)}{d\nu^2}-\left\{h+\left(m^2-\frac{1}{4}\right)\alpha^2\frac{sn^2(\nu,\beta)}{cn^2(\nu,\beta)}\right\}\Theta(\nu)=0 \qquad \nu\in[-\nu_0,\nu_0] \quad \nu_0<K(\beta)$$
$$\Leftrightarrow \tilde{\nu}=i\nu\rightarrow\frac{d^2\Theta(\tilde{\nu})}{d\tilde{\nu}^2}+\left\{h-\left(m^2-\frac{1}{4}\right)\alpha^2 sn^2(\tilde{\nu},\alpha)\right\}\Theta(\nu)=0 \quad avec \quad sn^2(\tilde{\nu},\alpha)=-\frac{sn^2(\nu,\beta)}{cn^2(\nu,\beta)}$$

Dans ce cas au premier abord j'utiliserais les deux développements précédents en substituant la valeur $sn^2(\tilde{\nu},\alpha)$*. Cela donnerait :*

$$\begin{cases}\Theta_1(\nu)=HeunG_l\left(\frac{1}{\alpha^2},-\frac{h}{4\alpha^2};\frac{1-2m}{4},\frac{2m+1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{2};-\frac{sn^2(\nu,\beta)}{cn^2(\nu,\beta)}\right)\Rightarrow\Theta_1(0)\neq0 \quad et \quad \Theta_1'(0)=0\\ \Theta_2(\nu)=\frac{sn(\nu,\beta)}{cn(\nu,\beta)}HeunG_l\left(\frac{1}{\alpha^2},\frac{1+\alpha^2-h}{4\alpha^2};\frac{3-2m}{4},\frac{2m+3}{4},\frac{3}{2},\frac{1}{2};-\frac{sn^2(\nu,\beta)}{cn^2(\nu,\beta)}\right)\Rightarrow\Theta_2(0)=0 \quad et \quad \Theta_2'(0)\neq0\end{cases}$$

Mais il se trouve que la récurrence de ces deux développements conduit pour certaines valeurs de ν_0 *à une divergence nette de la série car le terme* $\frac{sn^2(\nu,\beta)}{cn^2(\nu,\beta)}$ *est tout simplement supérieur à 1.*

Dans ce cas il convient d'utiliser d'autres développements de Heun équivalents au point singulier 0. C'est encore R.S.Maier qui nous sauve dans sa publication de 2006, « The 192 Solutions of the Heun Equation », pages 15 et 16, avec les deux développements suivants :

$$\begin{cases}\Theta_1(x)=(1-x)^{-\tilde{\alpha}}HeunG_l\left(\frac{a}{a-1},\frac{-q+\gamma a\tilde{\alpha}}{a-1};\tilde{\alpha},\tilde{\alpha}-\delta+1,\gamma,\tilde{\alpha}-\tilde{\beta}+1;\frac{x}{x-1}\right)\\ \Theta_2(x)=x^{1-\gamma}(1-x)^{-\tilde{\alpha}+\gamma-1}HeunG_l\left(\frac{a}{a-1},\frac{-q+(\gamma-1)\varepsilon-((\gamma-1)(2\tilde{\alpha}-\gamma-\delta+2)-\gamma\tilde{\alpha})a}{a-1};\tilde{\alpha}-\gamma-\delta+2,\tilde{\alpha}-\gamma+1,2-\gamma,\tilde{\alpha}-\tilde{\beta}+1;\frac{x}{x-1}\right)\end{cases}$$

Ce qui donne avec la substitution des paramètres de Heun correspondant à l'équation de Lamé :

$$a=\frac{1}{\alpha^2} \quad q=-\frac{h}{4\alpha^2} \quad \tilde{\alpha}=\frac{1-2m}{4},\tilde{\beta}=\frac{2m+1}{4},\gamma=\delta=\varepsilon=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{a}{a-1}=\frac{1}{\beta^2}$$
$$\begin{cases}\Theta_1(x)=(1-x)^{\frac{2m-1}{4}}HeunG_l\left(\frac{1}{\beta^2},\frac{1+2h-2m}{8\beta^2};\frac{1-2m}{4},\frac{3-2m}{4},\frac{1}{2},1-m;\frac{x}{x-1}\right)\\ \Theta_2(x)=x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{3-2m}{4}}HeunG_l\left(\frac{1}{\beta^2},\frac{7+2h-6m+2\alpha^2}{8\beta^2};\frac{5-2m}{4},\frac{3-2m}{4},\frac{3}{2},1-m;\frac{x}{x-1}\right)\end{cases}$$

Une fois injecté la valeur de $x=sn^2(\tilde{\nu},\alpha)=-\frac{sn^2(\nu,\beta)}{cn^2(\nu,\beta)}\Rightarrow1-x=\frac{1}{cn^2(\nu,\beta)} \quad \frac{x}{x-1}=sn^2(\nu,\beta)$ *, il vient à une constante imaginaire près :*

$$\begin{cases}\Theta_1(\nu)=cn^{\frac{1-2m}{2}}(\nu,\beta)HeunG_l\left(\frac{1}{\beta^2},\frac{1+2h-2m}{8\beta^2};\frac{1-2m}{4},\frac{3-2m}{4},\frac{1}{2},1-m;sn^2(\nu,\beta)\right)\\ \Theta_2(\nu)=sn(\nu,\beta)cn^{\frac{1-2m}{2}}(\nu,\beta)HeunG_l\left(\frac{1}{\beta^2},\frac{7+2h-6m+2\alpha^2}{8\beta^2};\frac{5-2m}{4},\frac{3-2m}{4},\frac{3}{2},1-m;sn^2(\nu,\beta)\right)\end{cases}$$

Les récurrences de ces deux développements autour de 0 s'écrivent alors comme suit lorsque l'on se réduit uniquement au cas m=0 : (elles sont plus efficaces que d'avoir recours aux fonctions de Heun implémentées sous Mathematica) :

$$\begin{cases} \Theta_1(0) \neq 0 \quad et \quad \Theta_1'(0) = 0 \\ \Theta_1(\nu) = cn^{\frac{1-2m}{2}}(\nu,\beta) HeunG_l\left(\frac{1}{\beta^2}, \frac{1+2h-2m}{8\beta^2}; \frac{1-2m}{4}, \frac{3-2m}{4}, \frac{1}{2}, 1-m; sn^2(\nu,\beta)\right) = \sum_{n=0}^{n=+\infty} A_n sn^{2n}(\nu,\beta) \\ A_0 = 1 \quad A_1 = \frac{1+2h}{4} A_0 \quad A_{n+1} = \frac{2\left(1+2h+4n+8n^2\left(1+\beta^2\right)\right)A_n - \left(3-16n+16n^2\right)\beta^2 A_{n-1}}{8(n+1)(2n+1)} \\ \Theta_2(0) = 0 \quad et \quad \Theta_2'(0) \neq 0 \\ \Theta_2(\nu) = sn(\nu,\beta) cn^{\frac{1-2m}{2}}(\nu,\beta) HeunG_l\left(\frac{1}{\beta^2}, \frac{7+2h-6m+2\alpha^2}{8\beta^2}; \frac{5-2m}{4}, \frac{3-2m}{4}, \frac{3}{2}, 1-m; sn^2(\nu,\beta)\right) = sn(\nu,\beta) cn^{\frac{1-2m}{2}}(\nu,\beta) \sum_{n=0}^{n=+\infty} B_n sn^{2n}(\nu,\beta) \\ B_0 = 1 \quad B_1 = \frac{7+2h-2\alpha^2}{12} B_0 \quad B_{n+1} = \frac{2\left(7+2h-2\alpha^2+8n^2\left(1+\beta^2\right)+4n\left(3+\beta^2\right)\right)A_n + \left(1-16n^2\right)\beta^2 A_{n-1}}{8(n+1)(2n+3)} \end{cases}$$

Etant donné que $\nu_0 < K(\beta)$, il n'y a pas d'autres points singuliers de l'équation dans l'intervalle d'étude et donc pas de nécessité de faire appel à une technique perturbative pour trouver une solution approchée. Comme les deux solutions sont soit paire soit impaire, elles s'applique autant sur l'intervalle [0, v_0] que sur l'intervalle [-v_0, v_0].

Pour les problèmes suivant les solutions découlent immédiatement :

$$\frac{d^2\Theta(\nu)}{d\nu^2} - \left\{h + \left(m^2 - \frac{1}{4}\right)\alpha^2 \frac{sn^2(\nu,\beta)}{cn^2(\nu,\beta)}\right\}\Theta(\nu) = 0 \qquad \nu \in [0,\nu_0] \quad \nu_0 < K(\beta)$$

$$\Theta(\nu_0) = 1 \quad \Theta'(0) = 0 \to \Theta_1(\nu_0) = \frac{cn^{\frac{1-2m}{2}}(\nu,\beta) HeunG_l\left(\frac{1}{\beta^2}, \frac{1+2h-2m}{8\beta^2}; \frac{1-2m}{4}, \frac{3-2m}{4}, \frac{1}{2}, 1-m; sn^2(\nu,\beta)\right)}{cn^{\frac{1-2m}{2}}(\nu_0,\beta) HeunG_l\left(\frac{1}{\beta^2}, \frac{1+2h-2m}{8\beta^2}; \frac{1-2m}{4}, \frac{3-2m}{4}, \frac{1}{2}, 1-m; sn^2(\nu_0,\beta)\right)}$$

$$\Theta(\nu_0) = 1 \quad \Theta(0) = 0 \to \Theta_2(\nu) = \frac{sn(\nu,\beta) cn^{\frac{1-2m}{2}}(\nu,\beta) HeunG_l\left(\frac{1}{\beta^2}, \frac{7+2h-6m+2\alpha^2}{8\beta^2}; \frac{5-2m}{4}, \frac{3-2m}{4}, \frac{3}{2}, 1-m; sn^2(\nu,\beta)\right)}{sn(\nu_0,\beta) cn^{\frac{1-2m}{2}}(\nu_0,\beta) HeunG_l\left(\frac{1}{\beta^2}, \frac{7+2h-6m+2\alpha^2}{8\beta^2}; \frac{5-2m}{4}, \frac{3-2m}{4}, \frac{3}{2}, 1-m; sn^2(\nu_0,\beta)\right)}$$

Construction d'une première catégorie de solution locale régulière à l'infini par un développement de Fröbenius

La solution locale régulière à l'infini, de l'équation :

$$\frac{d^2\Theta(\nu)}{d\nu^2}-\left\{\lambda+\left(m^2-\frac{1}{4}\right)\alpha^2\frac{sn^2(\nu,\beta)}{cn^2(\nu,\beta)}\right\}\Theta(\nu)=0$$
$$\Leftrightarrow \tilde{\nu}=i\nu\rightarrow\frac{d^2\Theta(\tilde{\nu})}{d\tilde{\nu}^2}+\left\{\lambda-\left(m^2-\frac{1}{4}\right)\alpha^2 sn^2(\tilde{\nu},\alpha)\right\}\Theta(\nu)=0\quad avec\quad sn^2(\tilde{\nu},\alpha)=-\frac{sn^2(\nu,\beta)}{cn^2(\nu,\beta)}$$

s'obtient également par un examen attentif des diverses solutions 1 et 2 donnée par R.S.Maier en 2006, « The 192 Solutions of the Heun Equation » en pages 24 , 25 et 26.

Remarque : dans ce qui suit la variable x de l'équation algébrique figure l'expression :

$$x=sn^2(\tilde{\nu},\alpha)=-\frac{sn^2(\nu,\beta)}{cn^2(\nu,\beta)}\Rightarrow\frac{1}{x}=-\frac{cn^2(\nu,\beta)}{sn^2(\nu,\beta)}\quad et\quad \frac{1}{1-x}=\frac{cn^2(\nu,\beta)}{cn^2(\nu,\beta)+sn^2(\nu,\beta)}=cn^2(\nu,\beta)$$

On peut donc mettre à profit la transformation homographique 1/(1-x) qui figure justement parmi celles donnant les fonctions de Heun équivalentes, pour obtenir une expression « simplifiée » de la solution de Fröbenius. Mais revenons à l'expression attendue des solutions régulières sur l'intervalle : $\nu\in[\nu_0,K(\beta)]\Rightarrow x\in\left]-\infty,-\frac{sn^2(\nu_0,\beta)}{cn^2(\nu_0,\beta)}\right]$*. Les 4 expressions des solutions 1 et 2 au point singulier infini données par R.S.Maier sont les suivantes, soit régulières soit non régulières à l'infini. On remarque que les solutions #1 et #2 sont interchangeables par la substitution :* $\tilde{\alpha}$*<->*$\tilde{\beta}$ *:*

$$Fonction\ de\ Heun\quad point\ singulier\quad z=\infty$$
$$Solution\ \#1\rightarrow\begin{cases} z^{-\tilde{\alpha}}HeunG_l\left(\frac{1}{a},\frac{q+\tilde{\alpha}\{a(\tilde{\alpha}-\gamma-\delta+1)-\tilde{\beta}+\delta\}}{a};\tilde{\alpha},\tilde{\alpha}-\gamma+1,\tilde{\alpha}-\tilde{\beta}+1,\delta;\frac{1}{z}\right)= \\ =(z-1)^{-\tilde{\alpha}}HeunG_l\left(\frac{1}{1-a},\frac{q+\tilde{\alpha}\{a(\tilde{\alpha}-\gamma-\delta+1)-\tilde{\alpha}+\delta-1\}}{a-1};\tilde{\alpha},\tilde{\alpha}-\delta+1,\tilde{\alpha}-\tilde{\beta}+1,\gamma;\frac{1}{1-z}\right)\end{cases}$$
$$Solution\ \#2\rightarrow\begin{cases} z^{-\tilde{\beta}}HeunG_l\left(\frac{1}{a},\frac{q+\tilde{\beta}\{a(\tilde{\beta}-\gamma-\delta+1)-\tilde{\alpha}+\delta\}}{a};\tilde{\beta},\tilde{\beta}-\gamma+1,\tilde{\beta}-\tilde{\alpha}+1,\delta;\frac{1}{z}\right)= \\ =(z-1)^{-\tilde{\beta}}HeunG_l\left(\frac{1}{1-a},\frac{q+\tilde{\beta}\{a(\tilde{\beta}-\gamma-\delta+1)-\tilde{\beta}+\delta-1\}}{a-1};\tilde{\beta},\tilde{\beta}-\delta+1,\tilde{\beta}-\tilde{\alpha}+1,\gamma;\frac{1}{1-z}\right)\end{cases}$$

Or nous recherchons une solution régulière. Dans le cas m=0, on a :

$$a=\frac{1}{\alpha^2}\quad q=-\frac{h}{4\alpha^2}\quad \tilde{\alpha}=\tilde{\beta}=\frac{1}{4}\quad \gamma=\delta=\varepsilon=\frac{1}{2}$$

Alors les solutions #1 et #2 sont parfaitement identiques et toutes deux régulières à l'infini, ce qui nous amène à proposer la forme :

$$\begin{cases} \tilde{\nu} = i\nu \rightarrow \dfrac{d^2\Theta(\tilde{\nu})}{d\tilde{\nu}^2} + \left\{ h - \left(m^2 - \dfrac{1}{4} \right) \alpha^2 sn^2(\tilde{\nu}, \alpha) \right\} \Theta(\nu) = 0 \quad avec \quad sn^2(\tilde{\nu}, \alpha) = -\dfrac{sn^2(\nu, \beta)}{cn^2(\nu, \beta)} \\ \Rightarrow \dfrac{d^2\Theta(\nu)}{d\nu^2} - \left\{ h + \left(m^2 - \dfrac{1}{4} \right) \alpha^2 \dfrac{sn^2(\nu, \beta)}{cn^2(\nu, \beta)} \right\} \Theta(\nu) = 0 \qquad avec \qquad \nu \in [\nu_0, K(\beta)] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Theta(\nu) = \left(\dfrac{cn^2(\nu, \beta)}{sn^2(\nu, \beta)} \right)^{\frac{1}{4}} HeunG_l\left(\alpha^2, \dfrac{1 - 4h + \alpha^2}{16}; \dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{4}, 1, \dfrac{1}{2}; -\dfrac{cn^2(\nu, \beta)}{sn^2(\nu, \beta)} \right) = \\ = \left(cn^2(\nu, \beta) \right)^{\frac{1}{4}} HeunG_l\left(-\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}, \dfrac{1 - 4h - 3\alpha^2}{16\beta^2}; \dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{4}, 1, \dfrac{1}{2}; cn^2(\nu, \beta) \right) \end{cases}$$

Lorsque m> 0, alors : $\tilde{\alpha} = \dfrac{1-2m}{4} < 0 \quad et \quad \tilde{\beta} = \dfrac{2m+1}{4} > 0$*. Et dans ce cas la seule solution régulière à l'infini est la solution #2, soit pour l'équation différentielle suivante :*

$$\dfrac{d^2\Theta(\nu)}{d\nu^2} - \left\{ h + \left(m^2 - \dfrac{1}{4} \right) \alpha^2 \dfrac{sn^2(\nu, \beta)}{cn^2(\nu, \beta)} \right\} \Theta(\nu) = 0 \qquad avec \qquad \nu \in [\nu_0, K(\beta)]$$

$$Solution\ \#2 \rightarrow \begin{cases} \Theta(\nu) = \left(\dfrac{cn^2(\nu, \beta)}{sn^2(\nu, \beta)} \right)^{\frac{2m+1}{4}} HeunG_l\left(\alpha^2, \dfrac{(2m+1)^2(1+\alpha^2) - 4h}{16}; \dfrac{2m+1}{4}, \dfrac{2m+3}{4}, 1+m, \dfrac{1}{2}; -\dfrac{cn^2(\nu, \beta)}{sn^2(\nu, \beta)} \right) = \\ = \left(cn^2(\nu, \beta) \right)^{\frac{2m+1}{4}} HeunG_l\left(-\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}, \dfrac{(2m+1)(1 - 3\alpha^2 + 2m\beta^2) - 4h}{16\beta^2}; \dfrac{2m+1}{4}, \dfrac{2m+3}{4}, 1+m, \dfrac{1}{2}; cn^2(\nu, \beta) \right) \end{cases}$$

La récurrence du développement autour de l'infini s'écrit alors comme suit lorsque l'on se réduit uniquement au cas m=0 : (toujours plus efficace que d'avoir recours aux fonctions de Heun implémentées sous Mathematica) :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\Theta(\nu)}{d\nu^2} - \left\{ h - \dfrac{\alpha^2}{4} \dfrac{sn^2(\nu, \beta)}{cn^2(\nu, \beta)} \right\} \Theta(\nu) = 0 \qquad avec \qquad \nu \in [\nu_0, K(\beta)] \quad avec \quad \Theta(K(\beta)) = 0 \\ \Theta(\nu) = \sqrt{cn(\nu, \beta)} HeunG_l\left(-\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}, \dfrac{1 - 4h - 3\alpha^2}{16\beta^2}; \dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{4}, 1, \dfrac{1}{2}; cn^2(\nu, \beta) \right) = \sqrt{cn(\nu, \beta)} \sum_{n=0}^{n=+\infty} A_n cn^{2n}(\nu, \beta) \\ A_0 = 1 \quad A_1 = \dfrac{3\alpha^2 + 4h - 1}{16\alpha^2} A_0 \quad A_{n+1} = \dfrac{\left(3\alpha^2 + 4h - 1 + 8n(2n+1)(2\alpha^2 - 1)\right) A_n + \left(3 - 16n + 16n^2\right)\left(1 - \alpha^2\right) A_{n-1}}{16\alpha^2 (n+1)^2} \\ Pour \qquad \Theta(\nu_0) = 1 \quad \Theta(K(\beta)) = 0 \Rightarrow \Theta(\nu) = \sqrt{\dfrac{cn(\nu, \beta)}{cn(\nu_0, \beta)}} \dfrac{HeunG_l\left(-\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}, \dfrac{1 - 4h - 3\alpha^2}{16\beta^2}; \dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{4}, 1, \dfrac{1}{2}; cn^2(\nu, \beta) \right)}{HeunG_l\left(-\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}, \dfrac{1 - 4h - 3\alpha^2}{16\beta^2}; \dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{4}, 1, \dfrac{1}{2}; cn^2(\nu_0, \beta) \right)} \end{cases}$$

Valeur approchée de la première catégorie de solution locale régulière à l'infini

On peut également considérer à profit le développement limité autour de la valeur K(β) de l'équation différentielle, et obtenir une approximation sous la forme de fonctions de Bessel I lorsque les valeurs propres h sont positives et de valeur importante :

$$\text{Notation} \quad \nu \to x \quad \nu_0 \to x_0 \quad \begin{cases} \nu = m - \dfrac{1}{2} \\ m^2 - \dfrac{1}{4} \to \nu(\nu+1) \end{cases} \qquad \Theta \to y$$

$$y''(x) - \left\{ h + \nu(\nu+1)\alpha^2 \frac{sn^2(x,\beta)}{cn^2(x,\beta)} \right\} y(x) = 0 \qquad avec \qquad x \in [x_0, K(\beta)] \qquad et \qquad h > 0$$

$$\frac{sn^2(x,\beta)}{cn^2(x,\beta)} \approx \frac{1}{1-\beta^2} \frac{1}{(x-K(\beta))^2} \Rightarrow y''(x) - \left\{ h + \frac{\nu(\nu+1)}{(x-K(\beta))^2} \right\} y(x) = 0$$

$$\tilde{x} = K(\beta) - x \Rightarrow y''(\tilde{x}) - \left\{ h + \frac{\nu(\nu+1)}{\tilde{x}^2} \right\} y(\tilde{x}) = 0 \Rightarrow y(\tilde{x}) = A \times \sqrt{\tilde{x}} I_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{h}\tilde{x}\right) + B \times \sqrt{\tilde{x}} K_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{h}\tilde{x}\right)$$

Là encore la solution régulière à l'infini est la fonction de Bessel I, soit donc l'approximation suivante : $y(\tilde{x}) = \sqrt{\tilde{x}} I_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{h}\tilde{x}\right) = \sqrt{\tilde{x}} I_m\left(\sqrt{h}\tilde{x}\right)$*. Pour la valeur particulière m=0, l'expression approchée est alors particulièrement simple :*

$$\begin{cases} y''(x) - \left\{ h - \dfrac{\alpha^2}{4} \dfrac{sn^2(x,\beta)}{cn^2(x,\beta)} \right\} y(x) = 0 \qquad avec \qquad x \in [x_0, K(\beta)] \qquad et \qquad \begin{cases} y(x_0) = 1 \\ y(K(\beta)) = 0 \end{cases} \\ y(x) \approx \sqrt{\dfrac{K(\beta)-x}{K(\beta)-x_0}} \dfrac{I_0\left(\sqrt{h}(K(\beta)-x)\right)}{I_0\left(\sqrt{h}(K(\beta)-x_0)\right)} \end{cases}$$

Construction d'une deuxième catégorie de solution locale régulière à l'infini par un développement de Fröbenius

La solution locale régulière à l'infini de l'équation suivante requiert une approche similaire à la précédente étant donné que la singularité est également à l'infini :

$$\frac{\partial^2 H(\mu)}{\partial \mu^2} + \left\{ \lambda - \left(m^2 - \frac{1}{4} \right) \frac{1}{sn^2(\mu,\alpha)} \right\} H(\mu) = 0 \quad avec \quad \mu \in [\mu_0, 2K(\alpha)]$$

$$\tilde{\mu} = \mu + iK(\beta) \qquad sn(\tilde{\mu},\alpha) = \frac{1}{\alpha \; sn(\mu,\alpha)} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 H(\tilde{\mu})}{\partial \tilde{\mu}^2} + \left\{ \lambda - \left(m^2 - \frac{1}{4} \right) \alpha^2 sn^2(\tilde{\mu},\alpha) \right\} H(\tilde{\mu}) = 0$$

$$\begin{cases} x = sn^2(\tilde{\mu},\alpha) \\ a = \dfrac{1}{\alpha^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{x} = sn^2(\mu,\alpha)$$

Ici on peut mettre à profit la transformation homographique a/x qui figure justement parmi celles donnant les fonctions de Heun équivalentes, pour obtenir une expression « simplifiée » de la solution de Fröbenius. Les 2 expressions des solutions 1 et 2 au point singulier infini données par R.S.Maier dans « The 192 Solutions of the Heun Equation » en pages 24 , 25 et 26 sont les suivantes, soit régulières soit non régulières à l'infini. On remarque que les solutions #1 et #2 sont interchangeables par la substitution : $\widetilde{\alpha} <-> \widetilde{\beta}$:

$$\text{Fonction de Heun} \quad \text{point singulier} \quad x=\infty \qquad avec \quad \widetilde{\alpha}+\widetilde{\beta}+1-\gamma-\delta=\varepsilon$$

$$Solution\ \#1 \rightarrow \begin{cases} x^{-\widetilde{\alpha}} HeunG_l\left(a, q+\widetilde{\alpha}\left\{a\left(\widetilde{\alpha}-\gamma-\delta+1\right)-\widetilde{\beta}+\delta\right\};\widetilde{\alpha},\widetilde{\alpha}-\gamma+1,\widetilde{\alpha}-\widetilde{\beta}+1,\widetilde{\alpha}+\widetilde{\beta}-\gamma-\delta+1;\dfrac{a}{x}\right)= \\ = x^{-\widetilde{\alpha}} HeunG_l\left(a, q+\widetilde{\alpha}\left\{a\left(\widetilde{\alpha}-\gamma-\delta+1\right)-\widetilde{\beta}+\delta\right\};\widetilde{\alpha},\widetilde{\alpha}-\gamma+1,\widetilde{\alpha}-\widetilde{\beta}+1,\varepsilon;\dfrac{a}{x}\right) \end{cases}$$

$$Solution\ \#2 \rightarrow \begin{cases} x^{-\widetilde{\beta}} HeunG_l\left(a, q+\widetilde{\beta}\left\{a\left(\widetilde{\beta}-\gamma-\delta+1\right)-\widetilde{\alpha}+\delta\right\};\widetilde{\beta},\widetilde{\beta}-\gamma+1,\widetilde{\beta}-\widetilde{\alpha}+1,\widetilde{\alpha}+\widetilde{\beta}-\gamma-\delta+1;\dfrac{a}{x}\right)= \\ = x^{-\widetilde{\beta}} HeunG_l\left(a, q+\widetilde{\beta}\left\{a\left(\widetilde{\beta}-\gamma-\delta+1\right)-\widetilde{\alpha}+\delta\right\};\widetilde{\beta},\widetilde{\beta}-\gamma+1,\widetilde{\beta}-\widetilde{\alpha}+1,\varepsilon;\dfrac{a}{x}\right) \end{cases}$$

Dans le cas d'une équation de Lamé où m=0, les paramètres sont les suivants :

$$a=\frac{1}{\alpha^2} \quad q=-\frac{\lambda}{4\alpha^2} \quad \widetilde{\alpha}=\widetilde{\beta}=\frac{1}{4} \quad \gamma=\delta=\varepsilon=\frac{1}{2}$$

Lorsque m> 0 : $\widetilde{\alpha}=\dfrac{1-2m}{4} \quad et \quad \widetilde{\beta}=\dfrac{2m+1}{4} \qquad a=\dfrac{1}{\alpha^2} \quad q=-\dfrac{\lambda}{4\alpha^2} \quad \gamma=\delta=\varepsilon=\dfrac{1}{2}$.

Alors pour m=0, les solutions #1 et #2 sont identiques et toutes deux régulières à l'infini, ce qui nous amène à proposer la forme :

$$\begin{cases} \widetilde{\mu}=\mu+iK(\beta) \qquad sn(\widetilde{\mu},\alpha)=\dfrac{1}{\alpha\ sn(\mu,\alpha)} \Leftrightarrow \dfrac{\partial^2 H(\widetilde{\mu})}{\partial\widetilde{\mu}^2}+\left\{\lambda-\left(m^2-\dfrac{1}{4}\right)\alpha^2 sn^2(\widetilde{\mu},\alpha)\right\}H(\widetilde{\mu})=0 \\ \Rightarrow \dfrac{\partial^2 H(\mu)}{\partial\mu^2}+\left\{\lambda-\left(m^2-\dfrac{1}{4}\right)\dfrac{1}{sn^2(\mu,\alpha)}\right\}H(\mu)=0 \quad avec \quad \mu\in[\mu_0,2K(\alpha)] \end{cases}$$

$$\Rightarrow H(\mu)=\sqrt{sn(\mu,\alpha)}HeunG_l\left(\frac{1}{\alpha^2},\frac{1+\alpha^2-4\lambda}{16\alpha^2};\frac{1}{4},\frac{3}{4},1,\frac{1}{2};sn^2(\mu,\alpha)\right)$$

Lorsque m> 0 comme $\widetilde{\alpha}=\dfrac{1-2m}{4}<0 \quad et \quad \widetilde{\beta}=\dfrac{2m+1}{4}>0$*, la seule solution régulière à l'infini est la solution #2, soit pour l'équation différentielle suivante, le développement de Fröbenius-Heun :*

$$\frac{\partial^2 H(\mu)}{\partial\mu^2}+\left\{\lambda-\left(m^2-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{sn^2(\mu,\alpha)}\right\}H(\mu)=0 \quad avec \quad \mu\in[\mu_0,2K(\alpha)]$$

$$\widetilde{\alpha}=\frac{1-2m}{4} \quad et \quad \widetilde{\beta}=\frac{2m+1}{4} \qquad a=\frac{1}{\alpha^2} \quad q=-\frac{\lambda}{4\alpha^2} \quad \gamma=\delta=\varepsilon=\frac{1}{2}$$

$$Solution\ \#2 \rightarrow H(\mu)=sn^{\frac{2m+1}{2}}(\mu,\alpha)HeunG_l\left(\frac{1}{\alpha^2},\frac{(2m+1)^2(1+\alpha^2)-4\lambda}{16\alpha^2};\frac{2m+1}{4},\frac{2m+3}{4},m+1,\frac{1}{2};sn^2(\mu,\alpha)\right)$$

La récurrence du développement autour de l'infini s'écrit alors comme suit lorsque l'on se réduit uniquement au cas m=0 : (toujours plus efficace que d'avoir recours aux fonctions de Heun implémentées sous Mathematica) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 H(\mu)}{\partial \mu^2} + \left\{\lambda + \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{sn^2(\mu,\alpha)}\right\} H(\mu) = 0 \quad avec \quad \mu \in [\mu_0, 2K(\alpha)] \quad et \quad H(2K(\alpha)) = 0 \\ H(\mu) = \sqrt{sn(\mu,\alpha)}\, HeunG_l\left(\dfrac{1}{\alpha^2}, \dfrac{1+\alpha^2-4\lambda}{16\alpha^2}; \dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{4}, 1, \dfrac{1}{2}; sn^2(\mu,\alpha)\right) = \sqrt{sn(\mu,\alpha)} \sum_{n=0}^{n=+\infty} A_n sn^{2n}(\mu,\alpha) \\ A_0 = 1 \quad A_1 = \dfrac{1+\alpha^2-4\lambda}{16} A_0 \quad A_{n+1} = \dfrac{\left((1+8n(2n+1))(1+\alpha^2) - 4\lambda\right)A_n - \left(3-16n+16n^2\right)\alpha^2 A_{n-1}}{16(n+1)^2} \\ Pour \quad H(\mu_0) = 1 \quad H(2K(\alpha)) = 0 \Rightarrow H(\mu) = \sqrt{\dfrac{sn(\mu,\alpha)}{sn(\mu_0,\alpha)}} \dfrac{HeunG_l\left(\dfrac{1}{\alpha^2}, \dfrac{1+\alpha^2-4\lambda}{16\alpha^2}; \dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{4}, 1, \dfrac{1}{2}; sn^2(\mu,\alpha)\right)}{HeunG_l\left(\dfrac{1}{\alpha^2}, \dfrac{1+\alpha^2-4\lambda}{16\alpha^2}; \dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{4}, 1, \dfrac{1}{2}; sn^2(\mu_0,\alpha)\right)} \end{cases}$$

Remarque : toutefois, il ne faut pas oublier que si μ0 < K(α) alors le développement de Fröbenius n'est plus valable car l'intervalle comporte deux points singuliers. Il faut donc dans ce cas trouver une solution approchée notamment sous la forme de fonction de Whittaker (voir le paragraphe suivant).

Valeur approchée de la deuxième catégorie de solution locale régulière à l'infini

On peut également considérer à profit le développement limité autour de la valeur 2K(α) de l'équation différentielle, et obtenir une approximation sous la forme de fonctions de Whittaker :

$$\frac{\partial^2 H(\mu)}{\partial \mu^2} + \left\{h - \left(m^2 - \frac{1}{4}\right)\frac{1}{sn^2(\mu,\alpha)}\right\} H(\mu) = 0 \quad avec \quad \mu \in [\mu_0, 2K(\alpha)] \quad et \quad H(2K(\alpha)) = 0$$

$$Notation \quad \nu \to \mu \quad \mu_0 \to x_0 \quad m^2 - \frac{1}{4} \to \nu(\nu+1) \qquad H \to y \quad h < 0 \to \lambda = -h > 0$$

$$y''(x) - \left\{\lambda + \frac{\nu(\nu+1)}{sn^2(x,\alpha)}\right\} y(x) = 0 \qquad avec \qquad x \in [x_0, 2K(\alpha)]$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{sn^2(x,\alpha)} \approx \dfrac{1}{(x-2K(\alpha))^2} \Rightarrow y''(\tilde{x}) - \left\{\lambda + \dfrac{\nu(\nu+1)}{\tilde{x}^2}\right\} y(\tilde{x}) = 0 \Rightarrow y(\tilde{x}) = A \times \sqrt{\tilde{x}}\, I_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}\tilde{x}\right) + B \times \sqrt{\tilde{x}}\, K_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda}\tilde{x}\right) \\ \tilde{x} = 2K(\alpha) - x \end{cases}$$

Là encore la solution régulière à l'infini est la fonction de Bessel I, soit donc l'approximation suivante : $y(\tilde{x}) = \sqrt{\tilde{x}}\, I_{\nu+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{h}\tilde{x}\right) = \sqrt{\tilde{x}}\, I_m\left(\sqrt{h}\tilde{x}\right)$*. Pour la valeur particulière m=0, l'expression approchée est alors particulièrement simple :*

$$\begin{cases} y''(x) + \left\{h + \dfrac{\alpha^2}{4sn^2(x,\alpha)}\right\} y(x) = 0 \qquad avec \qquad x \in [x_0, 2K(\alpha)] \qquad et \qquad \begin{cases} y(x_0) = 1 \\ y(2K(\alpha)) = 0 \end{cases} \\ y(x) \approx \sqrt{\dfrac{2K(\alpha) - x}{2K(\alpha) - x_0}} \dfrac{I_0\left(\sqrt{-h}(2K(\alpha) - x)\right)}{I_0\left(\sqrt{-h}(2K(\alpha) - x_0)\right)} \end{cases}$$

Ce développement n'est valable que si la valeur h en valeur absolue est suffisamment grande, mais pas forcément très importante en soi. Dans ce cas j'ai été surpris de constater que l'approximation par les fonctions de Bessel est remarquable sur tout l'intervalle considéré.

Développement perturbatif pour une approximation des solutions locales à l'infini

Que ce soit la première ou la deuxième catégorie de solutions locales à l'infini, on a vu que le développement au premier ordre met en jeu des fonctions de Bessel I. Cette approximation n'est pas adéquate pour des faibles valeurs absolues des valeurs propres h. Je tente donc d'améliorer cela par un développement perturbatif. Pour simplifier, il suffit de se placer autour de x=0, ce qui correspond à la singularité infini de l'équation de Lamé. Proposons la forme suivante de la solution :

$$y''(x)-\left(h+\frac{m^2-\frac{1}{4}}{sn^2(x,\alpha)}\right)y(x)=0 \qquad h>0 \qquad y(x)=f(x)g(x) \qquad f''(x)-\left(h+\frac{m^2-\frac{1}{4}}{x^2}\right)f(x)=0$$

$$y'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \qquad et \qquad y''(x)=f''(x)g(x)+2f'(x)g'(x)+f(x)g''(x)$$

$$\Rightarrow\begin{cases} g(x_0)=1 \qquad y'(0)=f'(0)g(0)+f(0)g'(0)\neq 0\Rightarrow g(0)\neq 0 \\ g''(x)+2\frac{f'(x)}{f(x)}g'(x)-\left(m^2-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{sn^2(x,\alpha)}-\frac{1}{x^2}\right)g(x)=0\end{cases}$$

dont le paramètre de perturbation ε serait $\varepsilon=\frac{m^2-\frac{1}{4}}{2\sqrt{h}}$. *Soit l'équation différentielle suivante de la*

fonction g(x) : $\begin{cases} g(x_0)=1 \qquad g(0)\neq 0 \qquad g''(x)+2\frac{f'(x)}{f(x)}g'(x)-\left(m^2-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{sn^2(x,\alpha)}-\frac{1}{x^2}\right)g(x)=0 \\ g(x)=g_0(x)+\varepsilon\, g_1(x)+\varepsilon^2\, g_2(x)+\ldots\Rightarrow\begin{cases} g_0(0)\neq 0 \\ g_1(0)\neq 0\ldots\end{cases} \quad et \quad \begin{cases} g_0(x_0)=1 \\ 1+\varepsilon\, g_1(x_0)=1\Rightarrow g_1(x_0)=0 \\ \ldots g_2(x_0)=0\ldots\end{cases}\end{cases}$

Pour la première équation différentielle de $g_0(x)$, nous avons : $g''(x)+2\frac{f'(x)}{f(x)}g'(x)=0\Rightarrow g_0(x)=1$*, et sans même réfléchir beaucoup, la solution constante est triviale, soit la valeur 1. Pour la seconde fonction, l'équation différentielle est un tantinet plus complexe :*

$$g_0(x)=1\Rightarrow g_1''(x)+2\frac{f'(x)}{f(x)}g_1'(x)=2\sqrt{h}\left(\frac{1}{sn^2(x,\alpha)}-\frac{1}{x^2}\right)$$

Comme pour la fonction f(x), développons le second membre autour de la valeur x=0 :

$$\frac{1}{sn^2(x,\alpha)}-\frac{1}{x^2}\approx\frac{1+\alpha^2}{3}$$

De même développons le terme f(x) comportant la fonction de Bessel autour de x=0 :

$$f(x)=\sqrt{x}I_m\left(\sqrt{h}x\right)\approx\frac{h^{\frac{m}{2}}x^{m+\frac{1}{2}}}{2^m\Gamma(1+m)}\Rightarrow f'(x)=\left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{h^{\frac{m}{2}}x^{m-\frac{1}{2}}}{2^m\Gamma(1+m)}\Rightarrow 2\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{2m+1}{x}\Rightarrow g_1''(x)+\frac{2m+1}{x}g_1'(x)=2\sqrt{h}\frac{1+\alpha^2}{3}$$

La solution générale de cette équation différentielle est la suivante : $g_1(x)=A+\frac{B}{x^{2m}}+\sqrt{h}\frac{1+\alpha^2}{6(1+m)}x^2$.

Comme la solution ne peut comporter de divergence en x=0, cela implique que B=0, et comme elle doit s'annuler au point x=x0, il vient immédiatement :

$$g_1(x)=\sqrt{h}\,\frac{1+\alpha^2}{6(1+m)}\left(x^2-x_0{}^2\right)$$

La solution approchée au premier ordre de perturbation s'écrit donc :

$$\begin{cases} y''(x)-\left\{h+\left(m^2-\dfrac{1}{4}\right)\dfrac{1}{sn^2(\mu,\alpha)}\right\}y(x)=0 \qquad avec \qquad x\in[0,x_0] \qquad h>0 \qquad et \qquad \begin{cases} y(x_0)=1 \\ y(0)=0 \end{cases} \\ y(x)\approx\sqrt{\dfrac{x}{x_0}}\,\dfrac{I_m\left(\sqrt{h}(x)\right)}{I_m\left(\sqrt{h}(x_0)\right)}\left(1+\left(m^2-\dfrac{1}{4}\right)\dfrac{1+\alpha^2}{12}\left(x^2-x_0{}^2\right)\right)=\sqrt{\dfrac{x}{x_0}}\,\dfrac{I_m\left(\sqrt{h}(x)\right)}{I_m\left(\sqrt{h}(x_0)\right)}\left(1+\left(m^2-\dfrac{1}{4}\right)\dfrac{1+\alpha^2}{12}(x-x_0)(x+x_0)\right) \end{cases}$$

Pour le problème complémentaire qui nous occupe, cela donne :

$$\begin{cases} y''(x)-\left\{h+\left(m^2-\dfrac{1}{4}\right)\dfrac{1}{sn^2(\mu,\alpha)}\right\}y(x)=0 \qquad avec \qquad x\in[x_0,2K(\alpha)] \qquad h>0 \qquad et \qquad \begin{cases} y(x_0)=1 \\ y(2K(\alpha))=0 \end{cases} \\ y(x)\approx\sqrt{\dfrac{2K(\alpha)-x}{2K(\alpha)-x_0}}\,\dfrac{I_m\left(\sqrt{h}(2K(\alpha)-x)\right)}{I_m\left(\sqrt{h}(2K(\alpha)-x_0)\right)}\left(1+\left(m^2-\dfrac{1}{4}\right)\dfrac{1+\alpha^2}{12}(x-x_0)(4K(\alpha)-x-x_0)\right) \end{cases}$$

S'il s'agit maintenant de trouver le même type de développement perturbatif au problème suivant :

$$y''(x)-\left\{h+\left(m^2-\frac{1}{4}\right)\alpha^2\frac{sn^2(x,\beta)}{cn^2(x,\beta)}\right\}y(x)=0 \qquad avec \qquad x\in[x_0,K(\beta)] \qquad et \qquad h>0$$

La solution approchée s'écrit alors :

$$\begin{cases} y''(x)-\left\{h+\left(m^2-\dfrac{1}{4}\right)\alpha^2\dfrac{sn^2(x,\beta)}{cn^2(x,\beta)}\right\}y(x)=0 \qquad avec \qquad x\in[x_0,K(\beta)] \qquad et \qquad h>0 \qquad et \qquad \begin{cases} y(x_0)=1 \\ y(K(\beta))=0 \end{cases} \\ y(x)\approx\sqrt{\dfrac{K(\beta)-x}{K(\beta)-x_0}}\,\dfrac{I_m\left(\sqrt{h}(K(\beta)-x)\right)}{I_m\left(\sqrt{h}(K(\beta)-x_0)\right)}\left(1+\left(m^2-\dfrac{1}{4}\right)\dfrac{1+\alpha^2}{12}(x-x_0)(2K(\beta)-x-x_0)\right) \end{cases}$$

Fonctions de Lamé-Wangerin

Les fonctions de Lamé-Wangerin ont été introduites pour résoudre des problèmes aux limites dans systèmes de coordonnées orthogonales basées sur des surfaces cyclides, telles qu'elles avaient été introduites en tout premier lieu par Albert Wangerin en 1875. Une étude de la séparation de l'équation dans un tel système de coordonnées cyclidiques, comme celui d'E.G.C.Poole conduit à deux équations de Lamé séparées dont l'une a comme particularité que la variable peut être mise sous forme purement imaginaire. De ce fait la solution du problème est susceptible d'atteindre la singularité à l'infini de l'équation de Lamé sous forme algébrique.

Dans ce cas une étude des contraintes de continuité de la solution conduisent à établir la nécessité pour une des solutions de l'équation de Lamé de vérifier la propriété suivante :

$$\text{Remarque} \quad k \to \alpha \quad k' = \sqrt{1-k^2} \to \beta$$
$$|sn(z,\alpha)|^{\frac{1}{2}} y(z) \quad \text{fini} \quad \text{Lorsque} \quad z = \pm iK(\beta)$$

Pour cela plusieurs études sont dues à Erdelyi dans l'ouvrage « HIGHER TRANSCENDENTAL FUNCTIONS VOL III » dans le chapitre XV sur les fonctions de Lamé, dans lequel il propose un développement des solutions de Lamé-Wangerin lorsque l'argument est principalement de la forme z=x+iK(β). Les développements sont alors donné sous la forme :

$$\text{Remarque} \quad k \to \alpha \quad k' \to \beta$$
$$\begin{cases} F_\nu^{2m}(z,\alpha) = \left(\dfrac{cn(z,\alpha)+i\,sn(z,\alpha)}{cn(z,\alpha)-i\,sn(z,\alpha)}\right)^{\frac{\nu+1}{2}} \displaystyle\sum_{r=0}^{r=+\infty} \widetilde{A}_r \left(\dfrac{cn(z,\alpha)+i\,sn(z,\alpha)}{cn(z,\alpha)-i\,sn(z,\alpha)}\right)^r \\ F_\nu^{2m+1}(z,\alpha) = \left(\dfrac{cn(z,\alpha)+i\,sn(z,\alpha)}{cn(z,\alpha)-i\,sn(z,\alpha)}\right)^{\frac{\nu+1}{2}} \left(\dfrac{cn(z,\alpha)-i\beta\,sn(z,\alpha)}{cn(z,\alpha)-i\,sn(z,\alpha)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\dfrac{cn(z,\alpha)+i\beta\,sn(z,\alpha)}{cn(z,\alpha)-i\,sn(z,\alpha)}\right)^{\frac{1}{2}} \displaystyle\sum_{r=0}^{r=+\infty} \widetilde{B}_r \left(\dfrac{cn(z,\alpha)+i\,sn(z,\alpha)}{cn(z,\alpha)-i\,sn(z,\alpha)}\right)^r \end{cases}$$

.

Par les équivalences d'expressions suivantes et l'introduction de la fonction amplitude de Jacobi, on peut déjà simplifier la forme des développement :

$$\zeta = \frac{\pi}{2} - am(z,\alpha) \Rightarrow \begin{cases} cn(z,\alpha) = Sin(\zeta) \\ sn(z,\alpha) = Cos(\zeta) \end{cases} \qquad \frac{cn(z,\alpha)+i\,sn(z,\alpha)}{cn(z,\alpha)-i\,sn(z,\alpha)} = \frac{Sin(\zeta)+i\,Cos(\zeta)}{Sin(\zeta)-i\,Cos(\zeta)} = -\frac{Cos(\zeta)-iSin(\zeta)}{Cos(\zeta)+iSin(\zeta)} = -e^{-2i\zeta}$$

$$\text{De plus} \quad \sqrt{\frac{cn(z,\alpha)-i\,\beta\,sn(z,k)}{cn(z,\alpha)-i\,sn(z,\alpha)} \frac{cn(z,\alpha)+i\,\beta\,sn(z,\alpha)}{cn(z,\alpha)-i\,sn(z,\alpha)}} = \frac{\sqrt{cn^2(z,\alpha)+\beta\,sn^2(z,\alpha)}}{cn(z,\alpha)-i\,sn(z,\alpha)} = dn(z,\alpha)\left(\frac{cn(z,\alpha)+i\,sn(z,\alpha)}{cn(z,\alpha)-i\,sn(z,\alpha)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_\nu^{2m}(z,\alpha) = \displaystyle\sum_{r=0}^{r=+\infty} \widetilde{A}_r (-1)^{r+\frac{\nu+1}{2}} e^{-i\zeta(\nu+2r+1)} = \sum_{r=0}^{r=+\infty} A_r e^{-i\zeta(\nu+2r+1)} \\ F_\nu^{2m+1}(z,\alpha) = dn(z,\alpha) \displaystyle\sum_{r=0}^{r=+\infty} \widetilde{B}_r (-1)^{r+\frac{\nu+1}{2}+\frac{1}{2}} e^{-i\zeta(\nu+2r+2)} = dn(z,\alpha) \sum_{r=0}^{r=+\infty} B_r e^{-i\zeta(\nu+2r+2)} \end{cases}$$

*Voyons si ce développement se simplifie lorsque l'on applique le changement de variable **z=ix.** Il s'avère être réel (à une constante près) lorsque l'argument de la fonction est purement imaginaire. A savoir que l'on peut écrire :*

$$sn(i\,x,\alpha)=i\frac{sn(x,\beta)}{cn(x,\beta)} \qquad cn(i\,x,k)=\frac{1}{cn(x,\beta)} \qquad dn(i\,x,k)=\frac{dn(x,\beta)}{cn(x,\beta)} \qquad \beta=\sqrt{1-\alpha^2}$$

$$\Rightarrow \frac{cn(i\,x,\alpha)}{sn(i\,x,\alpha)}=-\frac{i}{sn(x,\beta)} \Rightarrow e^{-2i\zeta}=-\frac{cn(i\,x,\alpha)+i\,sn(i\,x,\alpha)}{cn(i\,x,\alpha)-i\,sn(i\,x,\alpha)}=-\frac{\dfrac{1}{sn(x,\beta)}-1}{\dfrac{1}{sn(x,\beta)}+1}=-\frac{1-sn(x,\beta)}{1+sn(x,\beta)}.$$

$$dn(i\,x,\alpha)+i\,\alpha\,sn(i\,x,\alpha)=\frac{dn(x,\beta)-\alpha\,sn(x,\beta)}{cn(x,\beta)}=\frac{cn(x,\beta)}{dn(x,\beta)+\alpha\,sn(x,\beta)}$$

Et qu'à partir des deux développements des fonctions de Lamé-Wangerin, on arrive aux fonctions suivantes :

$$F_\nu^{2m}(z,\alpha)=\sum_{r=0}^{r=+\infty}A_r e^{-i(\nu+2r+1)\zeta} \qquad F_\nu^{2m+1}(z,\alpha)=dn(z,\alpha)\sum_{r=0}^{r=+\infty}B_r e^{-i(\nu+2r+2)\zeta} \qquad \zeta=\frac{\pi}{2}-am(z,\alpha)$$

$$z=ix \quad \zeta=\frac{\pi}{2}-am(i\,x,\alpha) \quad e^{-2i\zeta}=-\frac{1-sn(x,\beta)}{1+sn(x,\beta)} \Rightarrow \begin{cases} F_\nu^{2m}(i\,x,\alpha)=\displaystyle\sum_{r=0}^{r=+\infty}A_r\left(-\frac{1-sn(x,\beta)}{1+sn(x,\beta)}\right)^{\frac{(\nu+2r+1)}{2}} \\ F_\nu^{2m+1}(i\,x,\alpha)=\dfrac{dn(x,\beta)}{cn(x,\beta)}\displaystyle\sum_{r=0}^{r=+\infty}B_r\left(-\frac{1-sn(x,\beta)}{1+sn(x,\beta)}\right)^{\frac{(\nu+2r+2)}{2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \widetilde{F}_\nu^{2m}(x,\alpha)=e^{i\pi\frac{(\nu+1)}{2}}F_\nu^{2m}(i\,x,\alpha)=\left(\dfrac{1-sn(x,\beta)}{1+sn(x,\beta)}\right)^{\frac{(\nu+1)}{2}}\displaystyle\sum_{r=0}^{r=+\infty}A_r(-1)^r\left(\frac{1-sn(x,\beta)}{1+sn(x,\beta)}\right)^r \\ \widetilde{F}_\nu^{2m+1}(x,\alpha)=e^{i\pi\frac{(\nu+2)}{2}}F_\nu^{2m+1}(i\,x,\alpha)=\dfrac{dn(x,\beta)}{cn(x,\beta)}\left(\dfrac{1-sn(x,\beta)}{1+sn(x,\beta)}\right)^{\frac{(\nu+2)}{2}}\displaystyle\sum_{r=0}^{r=+\infty}B_r(-1)^r\left(\frac{1-sn(x,\beta)}{1+sn(x,\beta)}\right)^r \end{cases}$$

Et l'on peut affirmer que les deux fonctions sont solutions de l'équation différentielle de Lamé suivantes :

$$y''(x)-\left(h+\nu(\nu+1)\alpha^2\frac{sn^2(x,\beta)}{cn^2(x,\beta)}\right)y(x)=0 \leftrightarrow \begin{cases} \widetilde{F}_\nu^{2m}(x,\alpha)=\displaystyle\sum_{r=0}^{r=+\infty}A_r(-1)^r\left(\frac{1-sn(x,\beta)}{1+sn(x,\beta)}\right)^{\frac{\nu+2r+1}{2}} \\ \widetilde{F}_\nu^{2m+1}(x,\alpha)=\dfrac{dn(x,\beta)}{cn(x,\beta)}\displaystyle\sum_{r=0}^{r=+\infty}B_r(-1)^r\left(\frac{1-sn(x,\beta)}{1+sn(x,\beta)}\right)^{\frac{\nu+2r+2}{2}} \end{cases}.$$

$$\text{Condition de Lamé Wangerin} \quad \frac{\widetilde{F}_\nu^{2m}(x,\alpha)}{\sqrt{cn(x,\beta)}} \quad et \quad \frac{\widetilde{F}_\nu^{2m+1}(x,\alpha)}{\sqrt{cn(x,\beta)}} \quad \text{continue en } x=\pm K(\beta)$$

*Toutefois pour l'instant je doute de l'utilité pratique de cette construction dans la résolution de problèmes aux limites pour le changement de variable **z=ix**, sachant que certes les fonctions possèdes les bonnes propriétés en x=K(β), mais elles divergent en x=K(β). D'autre part je ne peux construire de fonctions paires ou impaires sans rencontrer la même divergence. Les valeurs en x=0 sont les suivantes :* $\widetilde{F}_\nu^{2m}(0,\alpha)=\sum_{r=0}^{r=+\infty}A_r(-1)^r$ $\quad \widetilde{F}_\nu^{2m+1}(0,\alpha)=\sum_{r=0}^{r=+\infty}B_r(-1)^r$. *Et les dérivées premières ne s'annulent pas plus en x=0. En x=K(β) nous avons :*

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{1-sn(x,\beta)}{1+sn(x,\beta)}\approx\dfrac{\alpha^2}{4}(x-K(\beta))^2+O\left((x-K(\beta))^4\right) \\ \dfrac{dn(x,\beta)}{cn(x,\beta)}\approx-\dfrac{1}{x-K(\beta)} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \widetilde{F}_\nu^{2m}(x,\alpha)\approx\displaystyle\sum_{r=0}^{r=+\infty}A_r(-1)^r\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\nu+2r+1}(x-K(\beta))^{\nu+2r+1}\to\widetilde{F}_\nu^{2m}(K(\beta),\alpha)=0 \\ \widetilde{F}_\nu^{2m+1}(x,\alpha)\approx-\displaystyle\sum_{r=0}^{r=+\infty}B_r(-1)^r\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\nu+2r+2}(x-K(\beta))^{\nu+2r+1}\to\widetilde{F}_\nu^{2m+1}(K(\beta),\alpha)=0 \end{cases}$$

Il est donc clair que cette construction ne peut représenter de solution d'un problème de Sturm-Liouville car les fonctions n'ont pas de conditions aux limites homogène sur l'intervalle [0,K(β)].

Et si nous appliquons un changement de variable de la forme ***z=x+iK(β)*** *comme initialement dans les paragraphes consacrés aux fonctions de Lamé-Wangerin par Erdelyi dans l'ouvrage « HIGHER TRANSCENDENTAL FUNCTIONS VOL III » , chapitre XV sur les fonctions de Lamé, alors nous arrivons aux expressions et aux fonctions respectant l'équation :*

$$sn(x+iK(\beta),\alpha)=\frac{1}{\alpha\ sn(x,\alpha)} \qquad cn(x+iK(\beta),\alpha)=\frac{dn(x,\alpha)}{i\alpha\ sn(x,\alpha)} \qquad dn(x+iK(\beta),\alpha)=\frac{cn(x,\alpha)}{i\,sn(x,\alpha)} \qquad y''(x)+\left(h-\frac{\nu(\nu+1)}{sn^2(x,\alpha)}\right)y(x)=0$$

Avec ce changement de variable z=x+iK(β), les fonctions construites ont maintenant les expressions suivantes :

$$e^{-i\zeta}=-i\left(cn(x+iK(\beta),\alpha)+i\ sn(x+iK(\beta),\alpha)\right)=\frac{\alpha\ sn(x,\alpha)}{1+dn(x,\alpha)}=\sqrt{\frac{1-dn(x,\alpha)}{1+dn(x,\alpha)}}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\widetilde{F}_\nu^{2m}(x,\alpha)=\sum_{r=0}^{r=+\infty}A_r\alpha^{\nu+2r+1}\left(\frac{sn(x,\alpha)}{1+dn(x,\alpha)}\right)^{\nu+2r+1}=\sum_{r=0}^{r=+\infty}A_r\left(\frac{1-dn(x,\alpha)}{1+dn(x,\alpha)}\right)^{\frac{\nu+2r+1}{2}}\\ \widetilde{F}_\nu^{2m+1}(x,\alpha)=cn(x,\alpha)\sum_{r=0}^{r=+\infty}B_r\alpha^{\nu+2r+2}\frac{(sn(x,\alpha))^{\nu+2r+1}}{(1+dn(x,\alpha))^{\nu+2r+2}}=\frac{cn(x,\alpha)}{sn(x,\alpha)}\sum_{r=0}^{r=+\infty}B_r\left(\frac{1-dn(x,\alpha)}{1+dn(x,\alpha)}\right)^{\frac{\nu+2r+2}{2}}=\frac{\alpha\ cn(x,\alpha)}{1+dn(x,\alpha)}\sum_{r=0}^{r=+\infty}B_r\left(\frac{1-dn(x,\alpha)}{1+dn(x,\alpha)}\right)^{\frac{\nu+2r+1}{2}}\end{cases}$$

$$\text{Condition de Lamé Wangerin}\quad \frac{\widetilde{F}_\nu^{2m}(x,\alpha)}{\sqrt{sn(x,\alpha)}}\quad et\quad \frac{\widetilde{F}_\nu^{2m+1}(x,\alpha)}{\sqrt{sn(x,\alpha)}}\quad continue\ en\ x=0$$

Et correspondent aux deux problèmes de Sturm-Liouville suivants :

$$y''(x)+\left(h-\frac{\nu(\nu+1)}{sn^2(x,\alpha)}\right)y(x)=0\rightarrow\begin{cases}y(0)=0\quad et\quad y'(K(\alpha))=0\rightarrow\widetilde{F}_\nu^{2m}(x,\alpha)\\ y(0)=0\quad et\quad y(K(\alpha))=0\rightarrow\widetilde{F}_\nu^{2m+1}(x,\alpha)\end{cases}$$

La récurrence des coefficients du développement de ces fonctions est la suivante (formules 15 et 16, chapitre XV, « HIGHER TRANSCENDENTAL FUNCTIONS VOL III ») :

$$H=2h-\nu(\nu+1)\alpha^2$$

$$\begin{cases}A_{-1}=0\\ \left(H-(\nu+1)^2(2-\alpha^2)\right)A_0+(2\nu+3)\alpha^2A_1=0\\ (2r-1)(\nu+r)\alpha^2A_{r-1}+\left(H-(\nu+1+2r)^2(2-\alpha^2)\right)A_r+(r+1)(2\nu+2r+3)\alpha^2A_{r+1}=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}B_{-1}=0\\ \left(H-(\nu+2)^2(2-\alpha^2)\right)B_0+(2\nu+3)\alpha^2B_1=0\\ (2r+1)(\nu+r+1)\alpha^2B_{r-1}+\left(H-(\nu+2r+2)^2(2-\alpha^2)\right)B_r+(r+1)(2\nu+2r+3)\alpha^2B_{r+1}=0\end{cases}$$

Constructions de H.Volkmer dans « Eigenvalue Problems for Lamé's Differential Equation », 2018

H.Volkmer note dans son article :

$$\frac{cn(z,\alpha)+i\,sn(z,\alpha)}{cn(z,\alpha)-i\,sn(z,\alpha)}=-e^{-2i\zeta}\Rightarrow\eta=e^{-2i\zeta}=(sn(z,\alpha)-icn(z,\alpha))^2=(sn(z,\alpha)+icn(z,\alpha))^{-2}$$

$$\eta_1=\frac{1-\beta}{1+\beta}\in[0,1]\qquad\eta_2=\frac{1+\beta}{1-\beta}\in[1,+\infty]\qquad\eta_1\eta_2=1\qquad\eta_1+\eta_2=\frac{4}{\alpha^2}-2$$

$$Pour\ \eta\in[0,\eta_1]\rightarrow\frac{\alpha^2}{4}\left(\sqrt{\eta}+\frac{1}{\sqrt{\eta}}\right)^2-1=\frac{\alpha^2}{4}\frac{1}{\eta}\left(\eta^2+2\eta+1\right)-1$$

$$De\ plus\quad\frac{\alpha^2}{4}\frac{1}{\eta}(\eta_1-\eta)(\eta_2-\eta)=\frac{\alpha^2}{4}\frac{1}{\eta}\left(1+\eta^2-\eta\frac{4}{\alpha^2}+2\eta\right)=\frac{\alpha^2}{4}\frac{1}{\eta}\left(1+\eta^2+2\eta\right)-1$$

$$\Rightarrow\frac{\alpha^2}{4}\left(\sqrt{\eta}+\frac{1}{\sqrt{\eta}}\right)^2-1=\frac{\alpha^2}{4}\frac{1}{\eta}(\eta_1-\eta)(\eta_2-\eta)$$

De plus nous avons :

$$\sqrt{\eta}=sn(z,\alpha)-icn(z,\alpha)\qquad\frac{1}{\sqrt{\eta}}=sn(z,\alpha)+icn(z,\alpha)$$

$$\Rightarrow\sqrt{\eta}+\frac{1}{\sqrt{\eta}}=sn(z,\alpha)\Rightarrow\alpha^2sn^2(z,\alpha)-1=-dn^2(z,\alpha)=\frac{\alpha^2}{4}\frac{1}{\eta}(\eta_1-\eta)(\eta_2-\eta)$$

$$\Rightarrow idn(z,\alpha)=\frac{\alpha}{2}\frac{1}{\sqrt{\eta}}\sqrt{\eta_1-\eta}\sqrt{\eta_2-\eta}$$

La forme trigonométrique de l'équation de Lamé à l'aide de l'amplitude de Jacobi s'écrit :

$$\begin{cases}\zeta=\frac{\pi}{2}-am(z,\alpha)\Rightarrow Cos(\zeta)=sn(z,k)\\\left(1-\alpha^2Cos^2(\zeta)\right)y''(\zeta)+\alpha\,Cos(\zeta)Sin(\zeta)y'(\zeta)+\left(h-\nu(\nu+1)\alpha^2Cos^2(\zeta)\right)y(\zeta)=0\\\Leftrightarrow\sqrt{1-\alpha^2Cos^2(\zeta)}\frac{d}{d\zeta}\left(\sqrt{1-\alpha^2Cos^2(\zeta)}\frac{d}{d\zeta}(y(\zeta))\right)+\left(h-\nu(\nu+1)\alpha^2Cos^2(\zeta)\right)y(\zeta)=0\end{cases}.$$

Avec la variable η, l'équation de Lamé devient pour diverses formes de la fonction y(η) :

$$\begin{cases}\eta=e^{-2i\zeta}\Rightarrow\alpha^2\eta(\eta-\eta_1)(\eta-\eta_2)\left\{\frac{d^2y(\eta)}{d\eta^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\eta}+\frac{1}{\eta-\eta_1}+\frac{1}{\eta-\eta_2}\right)\frac{dy(\eta)}{d\eta}\right\}+\left\{h-\alpha^2\nu(\nu+1)\frac{(1+\eta)^2}{4\eta}\right\}y(\eta)=0\\y(\eta)=\sqrt{\eta_1-\eta}\,g(\eta)\Rightarrow\alpha^2\eta(\eta-\eta_1)(\eta-\eta_2)\left\{\frac{d^2g(\eta)}{d\eta^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\eta}+\frac{3}{\eta-\eta_1}+\frac{1}{\eta-\eta_2}\right)\frac{dg(\eta)}{d\eta}\right\}+\left\{h-\alpha^2\nu(\nu+1)\frac{(1+\eta)^2}{4\eta}+\frac{\alpha^2}{4}(2\eta-\eta_2)\right\}g(\eta)=0\\y(\eta)=\sqrt{\eta_2-\eta}\,g(\eta)\Rightarrow\alpha^2\eta(\eta-\eta_1)(\eta-\eta_2)\left\{\frac{d^2g(\eta)}{d\eta^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\eta}+\frac{1}{\eta-\eta_1}+\frac{3}{\eta-\eta_2}\right)\frac{dg(\eta)}{d\eta}\right\}+\left\{h-\alpha^2\nu(\nu+1)\frac{(1+\eta)^2}{4\eta}+\frac{\alpha^2}{4}(2\eta-\eta_1)\right\}g(\eta)=0\\y(\eta)=\sqrt{\eta_1-\eta}\sqrt{\eta_2-\eta}\,g(\eta)\Rightarrow\begin{cases}\alpha^2\eta(\eta-\eta_1)(\eta-\eta_2)\left\{\frac{d^2g(\eta)}{d\eta^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\eta}+\frac{3}{\eta-\eta_1}+\frac{3}{\eta-\eta_2}\right)\frac{dg(\eta)}{d\eta}\right\}+\left\{h-\alpha^2\nu(\nu+1)\frac{(1+\eta)^2}{4\eta}+\frac{\alpha^2}{4}(6\eta-\eta_1-\eta_2)\right\}g(\eta)=0\\Or\quad\alpha^2(\eta_1+\eta_2)=2\left(2-\alpha^2\right)\\\Rightarrow\alpha^2\eta(\eta-\eta_1)(\eta-\eta_2)\left\{\frac{d^2g(\eta)}{d\eta^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\eta}+\frac{3}{\eta-\eta_1}+\frac{3}{\eta-\eta_2}\right)\frac{dg(\eta)}{d\eta}\right\}+\left\{h-\alpha^2\nu(\nu+1)\frac{(1+\eta)^2}{4\eta}+\frac{3\alpha^2\eta}{2}-1+\frac{\alpha^2}{2}\right\}g(\eta)=0\end{cases}\end{cases}$$

.

Avec le changement de variable z=x+iK(β):

$$sn(x+iK(\beta),\alpha)=\frac{1}{\alpha\ sn(x,\alpha)} \qquad cn(x+iK(\beta),\alpha)=\frac{dn(x,\alpha)}{i\alpha\ sn(x,\alpha)} \qquad dn(x+iK(\beta),\alpha)=\frac{cn(x,\alpha)}{i\,sn(x,\alpha)}$$

Nous pouvons écrire les deux expressions suivantes :

$$\sqrt{dn(x+iK(\beta),\alpha)+cn(x+iK(\beta),\alpha)}=e^{-\frac{i\pi}{4}}\sqrt{\frac{dn(x,\alpha)+\alpha\,cn(x,\alpha)}{\alpha\,sn(x,\alpha)}}$$
$$\sqrt{dn(x+iK(\beta),\alpha)-cn(x+iK(\beta),\alpha)}=e^{+\frac{i\pi}{4}}\sqrt{\frac{dn(x,\alpha)-\alpha\,cn(x,\alpha)}{\alpha\,sn(x,\alpha)}}$$

H.Volkmer donne par ailleurs les deux identités suivantes :

$$q=\alpha\sqrt{\eta_1-\eta}\sqrt{\eta_2-\eta} \qquad \forall\eta \quad 0<\eta<\eta_1$$
$$\sqrt{1-\eta+q}+\sqrt{1-\eta-q}=\sqrt{2}\sqrt{1-\beta}\sqrt{\eta_2-\eta}$$
$$\sqrt{1-\eta+q}-\sqrt{1-\eta-q}=\sqrt{2}\sqrt{1+\beta}\sqrt{\eta_1-\eta}$$

Pour s'en convaincre il suffit de multiplier les deux identités entre-elles, et de constater que la deuxième identités s'annule en η=η1, la factorisation devient alors évidente. Comme :

$$idn(z,\alpha)=\frac{\alpha}{2}\frac{\sqrt{\eta_1-\eta}\sqrt{\eta_2-\eta}}{\sqrt{\eta}}=\frac{q}{2\sqrt{\eta}} \quad et \quad icn(z,\alpha)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\eta}}-\sqrt{\eta}\right)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}1-\eta+q=2\sqrt{\eta}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\eta}}-\sqrt{\eta}\right)+\frac{q}{2\sqrt{\eta}}\right\}=2i\sqrt{\eta}\left(dn(z,\alpha)+cn(z,\alpha)\right)\\ 1-\eta-q=2\sqrt{\eta}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\eta}}-\sqrt{\eta}\right)+\frac{q}{2\sqrt{\eta}}\right\}=-2i\sqrt{\eta}\left(dn(z,\alpha)-cn(z,\alpha)\right)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{1-\eta+q}=\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}\eta^{\frac{1}{4}}\sqrt{dn(z,\alpha)+cn(z,\alpha)}\\ \sqrt{1-\eta-q}=\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}\eta^{\frac{1}{4}}\sqrt{dn(z,\alpha)-cn(z,\alpha)}\end{cases}$$

Nous arrivons aux identités suivantes :

$$\begin{cases}\sqrt{\eta_1-\eta}=\eta^{\frac{1}{4}}\dfrac{e^{\frac{i\pi}{4}}\sqrt{dn(z,\alpha)+cn(z,\alpha)}-e^{-\frac{i\pi}{4}}\sqrt{dn(z,\alpha)-cn(z,\alpha)}}{\sqrt{1+\beta}}\\ \sqrt{\eta_2-\eta}=\eta^{\frac{1}{4}}\dfrac{e^{\frac{i\pi}{4}}\sqrt{dn(z,\alpha)+cn(z,\alpha)}+e^{-\frac{i\pi}{4}}\sqrt{dn(z,\alpha)-cn(z,\alpha)}}{\sqrt{1-\beta}}\end{cases}$$

Notons une petite erreur de calcul de H.Volkmer dans son article de 2018, « Eigenvalue Problems for Lamé's Differential Equation », en page 11 pour les deux formules 4.7 et 4.8 de signe centrale à inverser.

Soit l'évaluation pour la valeur de l'argument z=x+iK(β) pour lesquelles les expressions sont bien réelles comme attendues :

$$Si \quad z = x + iK(\beta) \Rightarrow \sqrt{\eta_2 - \eta} = \eta^{\frac{1}{4}} \frac{\left(\sqrt{dn(x,\alpha) + \alpha\, cn(x,\alpha)} + \sqrt{dn(x,\alpha) - \alpha\, cn(x,\alpha)}\right)}{\sqrt{1-\beta}\sqrt{\alpha\, sn(x,\alpha)}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\eta_2 - \eta} = \eta^{\frac{1}{4}} \frac{\sqrt{dn(x,\alpha) + \alpha\, cn(x,\alpha)} + \sqrt{dn(x,\alpha) - \alpha\, cn(x,\alpha)}}{\sqrt{1-\beta}\sqrt{\alpha\, sn(x,\alpha)}} \quad et \quad \eta = \frac{1 - dn(x,\alpha)}{1 + dn(x,\alpha)} = \frac{\alpha^2 sn^2(x,\alpha)}{(1 + dn(x,\alpha))^2}$$

$$Idem\ pour \quad \sqrt{\eta_1 - \eta}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{\eta_1 - \eta} = \dfrac{\sqrt{dn(x,\alpha) + \alpha\, cn(x,\alpha)} - \sqrt{dn(x,\alpha) - \alpha\, cn(x,\alpha)}}{\sqrt{1+\beta}\sqrt{1 + dn(x,\alpha)}} \\ \sqrt{\eta_2 - \eta} = \dfrac{\sqrt{dn(x,\alpha) + \alpha\, cn(x,\alpha)} + \sqrt{dn(x,\alpha) - \alpha\, cn(x,\alpha)}}{\sqrt{1-\beta}\sqrt{1 + dn(x,\alpha)}} \end{cases}$$

Les deux nouvelles constructions que propose H.Volkmer sont les suivantes :

$$\eta = e^{-2i\left(\frac{\pi}{2} - am(z,\alpha)\right)} \qquad \begin{cases} F_\nu^{2m}(z,\alpha) = \sqrt{\eta_2 - \eta} \sum_{r=0}^{r=+\infty} A_r \eta^{\frac{\nu+2r+1}{2}} \\ F_\nu^{2m+1}(z,\alpha) = \sqrt{\eta_1 - \eta} \sum_{r=0}^{r=+\infty} B_r \eta^{\frac{\nu+2r+1}{2}} \end{cases}$$

$$z = x + iK(\beta) \Rightarrow \begin{cases} \widetilde{F}_\nu^{2m}(x,\alpha) = \dfrac{\sqrt{dn(x,\alpha) + \alpha\, cn(x,\alpha)} + \sqrt{dn(x,\alpha) - \alpha\, cn(x,\alpha)}}{\sqrt{1-\beta}\sqrt{1 + dn(x,\alpha)}} \sum_{r=0}^{r=+\infty} A_r \left(\dfrac{1 - dn(x,\alpha)}{1 + dn(x,\alpha)}\right)^{\frac{\nu+2r+1}{2}} \\ \widetilde{F}_\nu^{2m+1}(x,\alpha) = \dfrac{\sqrt{dn(x,\alpha) + \alpha\, cn(x,\alpha)} - \sqrt{dn(x,\alpha) - \alpha\, cn(x,\alpha)}}{\sqrt{1+\beta}\sqrt{1 + dn(x,\alpha)}} \sum_{r=0}^{r=+\infty} B_r \left(\dfrac{1 - dn(x,\alpha)}{1 + dn(x,\alpha)}\right)^{\frac{\nu+2r+1}{2}} \end{cases}$$

$$Condition\ de\ Lamé\ Wangerin \quad \frac{\widetilde{F}_\nu^{2m}(x,\alpha)}{\sqrt{sn(x,\alpha)}} \quad et \quad \frac{\widetilde{F}_\nu^{2m+1}(x,\alpha)}{\sqrt{sn(x,\alpha)}} \quad continue\ en\ x = 0$$

Avec pour récurrence des coefficients les expressions suivantes :

$$H = 2h - \nu(\nu+1)\alpha^2 \qquad \beta = \sqrt{1-\alpha^2}$$

$$\begin{cases} A_{-1} = 0 \quad et \quad \left(H - (2-\alpha^2)\left\{\dfrac{1}{4} + \left(\nu + \dfrac{3}{2}\right)^2\right\} + 2\beta\left(\nu + \dfrac{3}{2}\right)\right) A_0 + (2\nu+3)\,\alpha^2 A_1 = 0 \\ r(2\nu+2r+1)\,\alpha^2 A_{r-1} + \left(H - (2-\alpha^2)\left\{\dfrac{1}{4} + \left(\nu + 2r + \dfrac{3}{2}\right)^2\right\} + 2\beta\left(\nu + 2r + \dfrac{3}{2}\right)\right) A_r + (r+1)(2\nu+2r+3)\,\alpha^2 A_{r+1} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_{-1} = 0 \quad et \quad \left(H - (2-\alpha^2)\left\{\dfrac{1}{4} + \left(\nu + \dfrac{3}{2}\right)^2\right\} - 2\beta\left(\nu + \dfrac{3}{2}\right)\right) B_0 + (2\nu+3)\,\alpha^2 B_1 = 0 \\ r(2\nu+2r+1)\,\alpha^2 B_{r-1} + \left(H - (2-\alpha^2)\left\{\dfrac{1}{4} + \left(\nu + 2r + \dfrac{3}{2}\right)^2\right\} - 2\beta\left(\nu + 2r + \dfrac{3}{2}\right)\right) B_r + (r+1)(2\nu+2r+3)\,\alpha^2 B_{r+1} = 0 \end{cases}$$

Il est à noter que la matrice de récurrence est symétrique.

Les premières constructions dont parle H.Volkmer sont équivalentes aux constructions proposées par Erdelyi dans l'ouvrage « HIGHER TRANSCENDENTAL FUNCTIONS VOL III » , chapitre XV sur les fonctions de Lamé

$$\eta = e^{-2i\left(\frac{\pi}{2}-am(z,\alpha)\right)} \qquad \begin{cases} F_\nu^{2m}(z,\alpha) = \sum_{r=0}^{r=+\infty} A_r \eta^{\frac{\nu+2r+1}{2}} \\ F_\nu^{2m+1}(z,\alpha) = \frac{\sqrt{\eta_1-\eta}\sqrt{\eta_2-\eta}}{2} \sum_{r=0}^{r=+\infty} B_r \eta^{\frac{\nu+2r+1}{2}} \end{cases}$$

$$z = x + iK(\beta) \Rightarrow \sqrt{\eta_1-\eta}\sqrt{\eta_2-\eta} = \frac{2cn(x,\alpha)}{1+dn(x,\alpha)} \Rightarrow \begin{cases} \widetilde{F}_\nu^{2m}(x,\alpha) = \sum_{r=0}^{r=+\infty} A_r \left(\frac{1-dn(x,\alpha)}{1+dn(x,\alpha)}\right)^{\frac{\nu+2r+1}{2}} \\ \widetilde{F}_\nu^{2m+1}(x,\alpha) = \frac{cn(x,\alpha)}{1+dn(x,\alpha)} \sum_{r=0}^{r=+\infty} B_r \left(\frac{1-dn(x,\alpha)}{1+dn(x,\alpha)}\right)^{\frac{\nu+2r+1}{2}} \end{cases}$$

$$\textit{Condition de Lamé Wangerin} \quad \frac{\widetilde{F}_\nu^{2m}(x,\alpha)}{\sqrt{sn(x,\alpha)}} \quad \textit{et} \quad \frac{\widetilde{F}_\nu^{2m+1}(x,\alpha)}{\sqrt{sn(x,\alpha)}} \quad \textit{continue en } x=0$$

Je rappelle la récurrence des coefficients du développement de ces fonctions est la suivante (formules 15 et 16, chapitre XV, « HIGHER TRANSCENDENTAL FUNCTIONS VOL III ») :

$$H = 2h - \nu(\nu+1)\alpha^2 \qquad \beta = \sqrt{1-\alpha^2}$$

$$\begin{cases} A_{-1} = 0 \\ \left(H - (\nu+1)^2(2-\alpha^2)\right)A_0 + (2\nu+3)\alpha^2 A_1 = 0 \\ (2r-1)(\nu+r)\alpha^2 A_{r-1} + \left(H - (\nu+1+2r)^2(2-\alpha^2)\right)A_r + (r+1)(2\nu+2r+3)\alpha^2 A_{r+1} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_{-1} = 0 \\ \left(H - (\nu+2)^2(2-\alpha^2)\right)B_0 + (2\nu+3)\alpha^2 B_1 = 0 \\ (2r+1)(\nu+r+1)\alpha^2 B_{r-1} + \left(H - (\nu+2r+2)^2(2-\alpha^2)\right)B_r + (r+1)(2\nu+2r+3)\alpha^2 B_{r+1} = 0 \end{cases}$$

Passons à la première construction des fonctions de Lamé-Wangerin toujours proposée par Erdelyi dans l'ouvrage « HIGHER TRANSCENDENTAL FUNCTIONS VOL III » au chapitre XV, sous la forme :

$$\begin{cases} F_\nu^{2m}(z,\alpha) = \sum_{r=0}^{r=+\infty} A_r \left(sn(z,\alpha)\right)^{-(\nu+2r+1)} = cn(z,\alpha)\sum_{r=0}^{r=+\infty} C_r \left(sn(z,\alpha)\right)^{-(\nu+2r+2)} \\ F_\nu^{2m+1}(z,\alpha) = dn(z,\alpha)\sum_{r=0}^{r=+\infty} B_r \left(sn(z,\alpha)\right)^{-(\nu+2r+2)} = dn(z,\alpha)cn(z,\alpha)\sum_{r=0}^{r=+\infty} D_r \left(sn(z,\alpha)\right)^{-(\nu+2r+3)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_\nu^{2m}(z,\alpha) = \left(\frac{1}{sn(z,\alpha)}\right)^{\nu+1} \sum_{r=0}^{r=+\infty} A_r \left(sn(z,\alpha)\right)^{-2r} = cn(z,\alpha)\left(\frac{1}{sn(z,\alpha)}\right)^{\nu+2} \sum_{r=0}^{r=+\infty} C_r \left(sn(z,\alpha)\right)^{-2r} \\ F_\nu^{2m+1}(z,\alpha) = dn(z,\alpha)\left(\frac{1}{sn(z,\alpha)}\right)^{\nu+2} \sum_{r=0}^{r=+\infty} B_r \left(sn(z,\alpha)\right)^{-2r} = dn(z,\alpha)cn(z,\alpha)\left(\frac{1}{sn(z,\alpha)}\right)^{\nu+3} \sum_{r=0}^{r=+\infty} D_r \left(sn(z,\alpha)\right)^{-2r} \end{cases}$$

Pour un argument purement imaginaire z=ix, il vient :

$$sn(i\,x,\alpha) = i\,\frac{sn(x,\beta)}{cn(x,\beta)} \qquad cn(i\,x,k) = \frac{1}{cn(x,\beta)} \qquad dn(i\,x,k) = \frac{dn(x,\beta)}{cn(x,\beta)}$$

$$\begin{cases} F_\nu^{2m}(i\,x,\alpha) = e^{-\frac{i\pi(\nu+1)}{2}} \frac{cn^{\nu+1}(x,\beta)}{sn^{\nu+1}(x,\beta)} \sum_{r=0}^{r=+\infty} A_r (-1)^r \left(\frac{cn(x,\beta)}{sn(x,\beta)}\right)^{2r} = e^{-\frac{i\pi(\nu+2)}{2}} \frac{cn(x,\beta)^{\nu+1}}{sn(x,\beta)^{\nu+2}} \sum_{r=0}^{r=+\infty} C_r (-1)^r \left(\frac{cn(x,\beta)}{sn(x,\beta)}\right)^{2r} \\ F_\nu^{2m+1}(i\,x,\alpha) = e^{-\frac{i\pi(\nu+2)}{2}} \frac{dn(x,\beta)cn^{\nu+1}(x,\beta)}{sn^{\nu+2}(x,\beta)} \sum_{r=0}^{r=+\infty} B_r (-1)^r \left(\frac{cn(x,\beta)}{sn(x,\beta)}\right)^{2r} = e^{-\frac{i\pi(\nu+3)}{2}} dn(x,\beta) \frac{cn^{\nu+1}(x,\beta)}{sn^{\nu+3}(x,\beta)} \sum_{r=0}^{r=+\infty} D_r (-1)^r \left(\frac{cn(x,\beta)}{sn(x,\beta)}\right)^{2r} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \widetilde{F}_\nu^{2m}(x,\alpha) = e^{\frac{i\pi(\nu+1)}{2}} F_\nu^{2m}(i\,x,\alpha) = \frac{cn^{\nu+1}(x,\beta)}{sn^{\nu+1}(x,\beta)} \sum_{r=0}^{r=+\infty} A_r (-1)^r \left(\frac{cn(x,\beta)}{sn(x,\beta)}\right)^{2r} \\ \widetilde{F}_\nu^{2m+1}(x,\alpha) = e^{\frac{i\pi(\nu+2)}{2}} F_\nu^{2m+1}(i\,x,\alpha) = \frac{dn(x,\beta)cn^{\nu+1}(x,\beta)}{sn^{\nu+2}(x,\beta)} \sum_{r=0}^{r=+\infty} B_r (-1)^r \left(\frac{cn(x,\beta)}{sn(x,\beta)}\right)^{2r} \end{cases}$$

Même en obtenant une construction, de valeur réelle, qui respecte la condition imposée cette fois en x=K(β) et x=-K(β), il y a divergence en x=0.

Pour un argument de la forme z=x+iK(β), nous obtenons :

$$sn(x+iK(\beta),\alpha) = \frac{1}{\alpha\ sn(x,\alpha)} \qquad cn(x+iK(\beta),\alpha) = \frac{dn(x,\alpha)}{i\alpha\ sn(x,\alpha)} \qquad dn(x+iK(\beta),\alpha) = \frac{cn(x,\alpha)}{i\,sn(x,\alpha)}$$

$$\begin{cases} \widetilde{F}_\nu^{2m}(x,\alpha) = F_\nu^{2m}(x+iK(\beta),\alpha) = \sum_{r=0}^{r=+\infty} A_r \alpha^{\nu+2r+1} sn^{\nu+2r+1}(x,\alpha) \\ \widetilde{F}_\nu^{2m+1}(x,\alpha) = iF_\nu^{2m+1}(x+iK(\beta),\alpha) = cn(x,\alpha)\sum_{r=0}^{r=+\infty} B_r \alpha^{\nu+2r+2} sn^{\nu+2r+1}(x,\alpha) \end{cases}$$

ou encore selon la deuxième forme proposée par Erdelyi :

$$\begin{cases} \widetilde{F}_\nu^{2m}(x,\alpha) = iF_\nu^{2m}(x+iK(\beta),\alpha) = dn(x,\alpha)\sum_{r=0}^{r=+\infty} C_r \alpha^{\nu+2r+1} sn^{\nu+2r+1}(x,\alpha) \\ \widetilde{F}_\nu^{2m+1}(x,\alpha) = F_\nu^{2m+1}(x+iK(\beta),\alpha) = -cn(x,\alpha)dn(x,\alpha)\sum_{r=0}^{r=+\infty} D_r \alpha^{\nu+2r+2} sn^{\nu+2r+1}(x,\alpha) \end{cases}$$

Et correspondent comme avec la forme de développement trigonométriques aux deux problèmes de Sturm-Liouville suivante :

$$y''(x)+\left(h-\frac{\nu(\nu+1)}{sn^2(x,\alpha)}\right)y(x)=0\rightarrow\begin{cases}y(0)=0 \quad et \quad y'(K(\alpha))=0\rightarrow\widetilde{F}_\nu^{2m}(x,\alpha)\\ y(0)=0 \quad et \quad y(K(\alpha))=0\rightarrow\widetilde{F}_\nu^{2m+1}(x,\alpha)\end{cases}$$

Voici les relations de récurrence des coefficients Ar, Br, Cr et Dr :

$$\begin{cases}A_{-1}=0\\ \left(h-(\nu+1)^2\left(1+\alpha^2\right)\right)A_0+2(2\nu+3)\alpha^2A_1=0\\ (\nu+2r-1)(\nu+2r)A_{r-1}+\left(h-(\nu+2r+1)^2\left(1+\alpha^2\right)\right)A_r+2(r+1)(2\nu+2r+3)\alpha^2A_{r+1}=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}B_{-1}=0\\ \left(h-(\nu+2)^2-(\nu+1)^2\alpha^2\right)B_0+2(2\nu+3)\alpha^2B_1=0\\ (\nu+2r)(\nu+2r+1)B_{r-1}+\left(h-(\nu+2r+2)^2-(\nu+2r+1)^2\alpha^2\right)B_r+(2r+1)(2\nu+2r+3)\alpha^2B_{r+1}=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}C_{-1}=0\\ \left(h-(\nu+1)^2-(\nu+2)^2\alpha^2\right)C_0+2(2\nu+3)\alpha^2C_1=0\\ (\nu+2r)(\nu+2r+1)C_{r-1}+\left(h-(\nu+2r+1)^2-(\nu+2r+2)^2\alpha^2\right)C_r+(2r+1)(2\nu+2r+3)\alpha^2C_{r+1}=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}D_{-1}=0\\ \left(h-(\nu+2)^2\left(1+\alpha^2\right)\right)D_0+2(2\nu+3)\alpha^2D_1=0\\ (\nu+2r+1)(\nu+2r+2)D_{r-1}+\left(h-(\nu+2r+2)^2\left(1+\alpha^2\right)\right)D_r+2(r+1)(2\nu+2r+3)\alpha^2D_{r+1}=0\end{cases}$$

De ce fait on se trouve donc un peu démuni avec le changement de variable z=ix (problème aux limites dans le système « Flat-Ring » d'E.G.C Poole) , car aucune méthode de construction valide ne semble émerger de la littérature.

Sauf peut-être dans l'article du même Erdélyi de 1948, « Lamé-Wangerin Functions » dans lequel ce dernier propose cette fois pour le problème électrostatique dans le système de coordonnées « Flat Ring » d'EGC.Poole, les développements suivants :

$$\begin{cases} F_\nu^{2m}(z,\alpha)=\sum_{r=0}^{r=+\infty}A_r\left(\frac{dn(z,\alpha)-\alpha\ cn(z,\alpha)}{\beta}\right)^{\nu+2r+1} \\ F_\nu^{2m+1}(z,\alpha)=sn(z,\alpha)\sum_{r=0}^{r=+\infty}B_r\left(\frac{dn(z,\alpha)-\alpha\ cn(z,\alpha)}{\beta}\right)^{\nu+2r+2} \end{cases}$$

Ce qui donne pour un argument purement imaginaire :

$$sn(i\,x,\alpha)=i\frac{sn(x,\beta)}{cn(x,\beta)} \qquad cn(i\,x,k)=\frac{1}{cn(x,\beta)} \qquad dn(i\,x,k)=\frac{dn(x,\beta)}{cn(x,\beta)}$$

$$\begin{cases} F_\nu^{2m}(i\,x,\alpha)=\sum_{r=0}^{r=+\infty}\frac{A_r}{\beta^{\nu+2r+1}}\left(\frac{dn(x,\beta)-\alpha}{cn(x,\beta)}\right)^{\nu+2r+1}=\sum_{r=0}^{r=+\infty}A_r\beta^{\nu+2r+1}\frac{cn(x,\beta)^{\nu+2r+1}}{(dn(x,\beta)+\alpha)^{\nu+2r+1}} \\ F_\nu^{2m+1}(i\,x,\alpha)=i\frac{sn(x,\beta)}{cn(x,\beta)}\sum_{r=0}^{r=+\infty}\frac{B_r}{\beta^{\nu+2r+2}}\left(\frac{dn(x,\beta)-\alpha}{cn(x,\beta)}\right)^{\nu+2r+2}=i\ sn(x,\beta)\sum_{r=0}^{r=+\infty}B_r\beta^{\nu+2r+2}\frac{cn(x,\beta)^{\nu+2r+1}}{(dn(x,\beta)+\alpha)^{\nu+2r+2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} \widetilde{F}_\nu^{2m}(x,\alpha)=F_\nu^{2m}(i\,x,\alpha)=\sum_{r=0}^{r=+\infty}A_r\beta^{\nu+2r+1}\frac{cn(x,\beta)^{\nu+2r+1}}{(dn(x,\beta)+\alpha)^{\nu+2r+1}} \\ \widetilde{F}_\nu^{2m+1}(x,\alpha)=-iF_\nu^{2m+1}(i\,x,\alpha)=sn(x,\beta)\sum_{r=0}^{r=+\infty}B_r\beta^{\nu+2r+2}\frac{cn(x,\beta)^{\nu+2r+1}}{(dn(x,\beta)+\alpha)^{\nu+2r+2}} \end{cases}$$

La construction semble présenter les bonnes propriétés de finitude sur l'intervalle [-K(β),K(β)] et à ses bornes :

$$\begin{cases} \nu\geq-\frac{1}{2} \quad et \quad \left|\frac{sn(x,\beta)}{cn(x,\beta)}\right|^{\frac{1}{2}}\widetilde{F}_\nu^{2m}(x,\alpha)=|sn(x,\beta)|^{\frac{1}{2}}\sum_{r=0}^{r=+\infty}A_r\beta^{\nu+2r+1}\frac{cn(x,\beta)^{\nu+2r+\frac{1}{2}}}{(dn(x,\beta)+\alpha)^{\nu+2r+1}}\propto cn(x,\beta)^{\nu+\frac{1}{2}} \\ \nu\geq-\frac{1}{2} \quad et \quad \left|\frac{sn(x,\beta)}{cn(x,\beta)}\right|^{\frac{1}{2}}\widetilde{F}_\nu^{2m+1}(x,\alpha)=|sn(x,\beta)|^{\frac{1}{2}}sn(x,\beta)\sum_{r=0}^{r=+\infty}B_r\beta^{\nu+2r+2}\frac{cn(x,\beta)^{\nu+2r+\frac{1}{2}}}{(dn(x,\beta)+\alpha)^{\nu+2r+2}}\propto cn(x,\beta)^{\nu+\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Pour ν>-1/2, alors les deux fonctions s'annulent en x=-K(β) et x=+K(β), et pour ν=-1/2, la valeur reste fini (mais cela ne garantie pas qu'il y ait continuité lorsque l'on passe de x=-K(β) à x=+K(β)). Les valeurs en x=0 sont également de nature homogènes puisque les développements sont paires ou impaires : $\widetilde{F}_\nu^{2m}{}'(0,\alpha)=0 \qquad \widetilde{F}_\nu^{2m+1}(0,\alpha)=0$. *Soit en récapitulant pour les deux bornes de l'intervalle :*

$$\begin{cases} \widetilde{F}_\nu^{2m}{}'(0,\alpha)=0 \\ \widetilde{F}_\nu^{2m}(K(\beta),\alpha)=0 \\ \widetilde{F}_\nu^{2m}(-x,\alpha)=\widetilde{F}_\nu^{2m}(x,\alpha) \end{cases} \qquad \begin{cases} \widetilde{F}_\nu^{2m+1}(0,\alpha)=0 \\ \widetilde{F}_\nu^{2m+1}(K(\beta),\alpha)=0 \\ \widetilde{F}_\nu^{2m+1}(-x,\alpha)=-\widetilde{F}_\nu^{2m+1}(x,\alpha) \end{cases}$$

Il y a donc de bonne chance que cette construction puisse être utilisée dans un problème aux limites de Sturm-Liouville, comme celui sur de l'iso-surface μ=Cste portée à un potentiel électrostatique constant.

La récurrence à appliquer pour la détermination des coefficients des deux développements :

$$\begin{cases} \widetilde{F}_\nu^{2m}(x,\alpha) = \sum_{r=0}^{r=+\infty} A_r \beta^{\nu+2r+1} \dfrac{cn(x,\beta)^{\nu+2r+1}}{(dn(x,\beta)+\alpha)^{\nu+2r+1}} \\ \widetilde{F}_\nu^{2m+1}(x,\alpha) = sn(x,\beta) \sum_{r=0}^{r=+\infty} B_r \beta^{\nu+2r+2} \dfrac{cn(x,\beta)^{\nu+2r+1}}{(dn(x,\beta)+\alpha)^{\nu+2r+2}} \end{cases} \qquad \beta = \sqrt{1-\alpha^2}$$

$$\begin{cases} A_{-1} = 0 \\ \left(\left(\nu(\nu+1) - (\nu+1)^2\right)(1+\alpha^2) - 2h\right) A_0 + (2\nu+3)\beta^2 A_1 = 0 \\ (2r-1)(\nu+r)\beta^2 A_{r-1} + \left(\left(\nu(\nu+1) - (\nu+1+2r)^2\right)(1+\alpha^2) - 2h\right) A_r + (r+1)(2\nu+2r+3)\beta^2 A_{r+1} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_{-1} = 0 \\ \left(\left(\nu(\nu+1) - (\nu+2)^2\right)(1+\alpha^2) - 2h\right) B_0 + (2\nu+3)\beta^2 B_1 = 0 \\ (2r+1)(\nu+r+1)\beta^2 B_{r-1} + \left(\left(\nu(\nu+1) - (\nu+2+2r)^2\right)(1+\alpha^2) - 2h\right) B_r + (r+1)(2\nu+2r+3)\beta^2 B_{r+1} = 0 \end{cases}$$

Pour obtenir cette récurrence, il suffit d'injecter les deux formes :

$$\begin{cases} F_\nu^{2m}(z,\alpha) = \sum_{r=0}^{r=+\infty} A_r \left(\dfrac{dn(z,\alpha) - \alpha\, cn(z,\alpha)}{\beta} \right)^{\nu+2r+1} \\ F_\nu^{2m+1}(z,\alpha) = sn(z,\alpha) \sum_{r=0}^{r=+\infty} B_r \left(\dfrac{dn(z,\alpha) - \alpha\, cn(z,\alpha)}{\beta} \right)^{\nu+2r+2} \end{cases}$$

Dans l'équation de Lamé originale, et d'identifier les puissances de la variable $u = dn(z,\alpha) - \alpha\, cn(z,\alpha)$ *terme à terme. Pour cela il est particulièrement utile de rappeler les correspondances de variables suivantes :*

$$\zeta = sn^2(z,\alpha) \quad et \quad u = dn(z,\alpha) - \alpha\, cn(z,\alpha) = \sqrt{1-\alpha^2\zeta} - \sqrt{1-\zeta} \quad et \quad \beta = \sqrt{1-\alpha^2}$$

$$Soit \quad \zeta = 1 - \frac{(\beta^2 - u^2)^2}{4u^2\alpha^2} \Rightarrow \sqrt{1-\zeta} = \frac{\beta^2 - u^2}{2u\alpha} \qquad et \qquad \sqrt{1-\alpha^2\zeta} = \frac{\beta^2 + u^2}{2u}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} cn(z,\alpha) = \sqrt{1-\zeta} = \dfrac{\beta^2 - u^2}{2u\alpha} \\ dn(z,\alpha) = \sqrt{1-\alpha^2\zeta} = \dfrac{\beta^2 + u^2}{2u} \\ sn(z,\alpha) = \sqrt{\zeta} = \sqrt{1 - \dfrac{(\beta^2 - u^2)^2}{4u^2\alpha^2}} \\ cn(z,\alpha)dn(z,\alpha) = \sqrt{1-\zeta}\sqrt{1-\alpha^2\zeta} = \dfrac{\beta^4 - u^4}{4u^2\alpha} \end{cases}$$

Là encore on peut affirmer que ces deux solutions respectent bien l'équation de Lamé modifiée :

$$y''(x) - \left(h + \nu(\nu+1)\alpha^2 \frac{sn^2(x,\beta)}{cn^2(x,\beta)} \right) y(x) = 0$$

Revenons sur la propriété de finitude imposée aux fonctions de Lamé-Wangerin, sous la forme :

$$|sn(z,\alpha)|^{\frac{1}{2}} y(z) \quad fini \quad Lorsque \quad z = \pm iK(\beta) \Leftrightarrow \underset{x\to\pm K(\beta)}{Lim} \frac{y(x)}{\sqrt{cn(x,\beta)}} = y_0$$

que nous venons de vérifier. Une fois injecté la forme de la fonction dans la solution complète de l'équation de Laplace, il faut tenir compte du terme de séparation. Voyons juste le comportement de la solution en ν autour des valeurs ν=+K(β) et ν=-K(β) :

$$x \to T(\nu) = R(\nu)y(\nu) \quad R(\nu) \propto \frac{1}{\sqrt{cn(\nu,\beta)}} \Rightarrow T(\nu) \propto \frac{y(\nu)}{\sqrt{cn(\nu,\beta)}}$$

$$x \to \pm K(\beta) \quad \begin{cases} y(\nu) = \tilde{F}_\nu^{2m}(\nu,\alpha) = \displaystyle\sum_{r=0}^{r=+\infty} A_r \beta^{\nu+2r+1} \frac{cn(\nu,\beta)^{\nu+2r+1}}{(dn(\nu,\beta)+\alpha)^{\nu+2r+1}} \approx A_0 \beta^{\nu+1} \frac{cn(\nu,\beta)^{\nu+1}}{(2\alpha)^{\nu+1}} \\ ou \\ y(\nu) = \tilde{F}_\nu^{2m+1}(\nu,\alpha) = sn(\nu,\beta) \displaystyle\sum_{r=0}^{r=+\infty} B_r \beta^{\nu+2r+2} \frac{cn(\nu,\beta)^{\nu+2r+1}}{(dn(\nu,\beta)+\alpha)^{\nu+2r+2}} \approx \pm B_0 \beta^{\nu+2} \frac{cn(\nu,\beta)^{\nu+1}}{(2\alpha)^{\nu+2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underset{x\to\pm K(\beta)}{Lim} \frac{\tilde{F}_\nu^{2m}(\nu,\alpha)}{\sqrt{cn(\nu,\beta)}} = \begin{cases} 0 \quad si \quad \nu > -\frac{1}{2} \\ \frac{A_0 \beta^{\nu+1}}{(2\alpha)^{\nu+1}} \quad si \quad \nu = -\frac{1}{2} \end{cases} \qquad et \qquad \underset{x\to\pm K(\beta)}{Lim} \frac{\tilde{F}_\nu^{2m+1}(\nu,\alpha)}{\sqrt{cn(\nu,\beta)}} = \begin{cases} 0 \quad si \quad \nu > -\frac{1}{2} \\ \pm \frac{B_0 \beta^{\nu+2}}{(2\alpha)^{\nu+2}} \quad si \quad \nu = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

La solution complète avec la fonction impaire présente un léger inconvénient de discontinuité entre les valeurs ν=+K(β) et ν=-K(β). Toutefois cette discontinuité est compensée par l'annulation de la fonction de la deuxième variable sur le plan équatorial, comme nous le voyons lors de la résolution du problème aux limites électrostatique (voir ci-avant dans la section « Système de coordonnées d'E.G.C Poole).